

Exercice 1, Coordonnées : paramétrisation

 a) Sphère de rayon R centrée à l'origine en coordonnées :

- Cartésiennes : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- Cylindriques : $\rho^2 + z^2 = R^2$ (où $x = \rho \cos \phi$ et $y = \rho \sin \phi$)
- Sphériques : $r = R$ (pas de condition sur les angles θ et ϕ)

 b) Cylindre de rayon R parallèle à l'axe $\hat{z}$ en coordonnées :

- Cartésiennes : $x^2 + y^2 = R^2$ et $-L/2 \leq z \leq L/2$
- Cylindriques : $\rho = R$ et $-L/2 \leq z \leq L/2$
- Sphériques : $r \sin \theta = R$ et $\arctan\left(\frac{2R}{L}\right) \leq \theta \leq \pi - \arctan\left(\frac{2R}{L}\right)$
 (où $z = r \cos \theta = \frac{R}{\tan \theta} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{R}{z}\right)$ et pas de condition sur l'angle ϕ)

Exercice 2, Systèmes de coordonnées
Coordonnées polaires

- a) Le point M , de coordonnées polaires (r, ϕ) , a pour vecteur position $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$.
- b) L'élément de surface élémentaire dS est le produit de l'élément de longueur dr dû à une variation infinitésimale dr de r avec l'élément de longueur $r d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de ϕ . Donc :

$$dS = r dr d\phi \quad (1)$$

L'idée est que pour dr et $d\phi$ suffisamment petits dS peut être assimilé à l'aire d'un carré. La surface d'un disque est donc l'intégration de ce petit élément de surface selon le rayon de 0 à R et sur un tour complet soit pour ϕ allant de 0 à 2π , i.e. :

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi. \quad (2)$$

 c) On projette $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\phi$ sur les vecteurs de base cartésien :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \equiv \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y. \quad (4)$$

On calcule les dérivées de $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\phi$ en dérivant leurs expressions en coordonnées cartésiennes puis en les réexprimant dans la base $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r. \quad (6)$$

d) La vitesse $\mathbf{v}$ est la dérivée du vecteur position $\mathbf{OM}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi . \quad (7)$$

L'accélération $\mathbf{a}$ est la dérivée du vecteur vitesse $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi . \quad (8)$$

Coordonnées cylindriques

- a) Le point M de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) a pour vecteur position $\mathbf{OM} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$.
 b) L'élément de volume élémentaire dV en coordonnées cylindriques est le produit de l'élément de longueur $d\rho$ dû à une variation infinitésimale $d\rho$ de ρ , avec l'élément de longueur $\rho d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de ϕ , et avec l'élément de longueur dz dû à une variation infinitésimale dz de z . Donc dV s'écrit :

$$dV = \rho d\rho d\phi dz . \quad (9)$$

Le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est donc l'intégration de cet élément de volume sur tout le cylindre :

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi dz . \quad (10)$$

c) Comme pour les coordonnées polaires :

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y , \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y , \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (13)$$

Les dérivées temporelles de ces vecteurs, exprimées en coordonnées cartésiennes, sont :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (16)$$

On cherche maintenant à exprimer les dérivées temporelles des vecteurs de base, i.e. les vecteurs $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$, $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$, dans la base de notre repère cylindrique. Pour ce faire, on utilise

le produit scalaire pour calculer les différentes composantes de ces vecteurs. On rappelle qu'un vecteur $\mathbf{b}$ peut s'écrire dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ à l'aide du produit scalaire comme :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 . \quad (17)$$

Ainsi, voici comment procéder pour projeter $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$ sur le repère cylindrique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_z \right) \mathbf{e}_z , \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi = 0 , \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{\phi} \cos^2 \phi = \dot{\phi} , \quad (20)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 . \quad (21)$$

On obtient ainsi l'expression de $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$ dans la base cylindrique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi . \quad (22)$$

On répète la démarche pour exprimer $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ dans le repère $(O, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_z \right) \mathbf{e}_z , \quad (23)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \cos^2 \phi - \dot{\phi} \sin^2 \phi = -\dot{\phi} , \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi = 0 , \quad (25)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 . \quad (26)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_\rho . \quad (27)$$

Finalement, la décomposition de $\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$ sur la base $(O, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ est triviale et se réduit au vecteur nul.

d) De même que pour les coordonnées polaires :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{OM}) = \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z , \quad (28)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z . \quad (29)$$

Coordonnées sphériques

- a) Le point M , de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , a pour vecteur position $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$.
- b) L'élément de volume élémentaire dV en coordonnées sphériques est le produit de la l'élément de longueur dr dû à une variation infinitésimale dr de r , avec l'élément de longueur $r d\theta$ dû à une variation infinitésimale $d\theta$ de l'angle θ , et avec l'élément de longueur $r \sin \theta d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de l'angle ϕ . On peut donc exprimer dV comme :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \quad (30)$$

Par conséquent, le volume V d'une sphère de rayon R s'écrit :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \quad (31)$$

Nous attirons ici votre attention sur le fait que le domaine de définition de l'angle θ en coordonnées sphériques est $[0, \pi]$, et celui de l'angle ϕ est $[0, 2\pi]$.

- c) Les vecteurs de base du repère sphérique se projettent comme ceci sur le repère cartésien :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \equiv \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z , \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \equiv \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z , \quad (33)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y . \quad (34)$$

Et leurs dérivées s'expriment comme cela :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} , \quad (35)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (37)$$

Maintenant et comme pour les coordonnées cylindriques, il faut projeter ces dérivées sur le repère sphérique. Commençons par $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi , \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0 , \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\theta} \sin^2 \theta = \dot{\theta} , \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \dot{\phi} \sin \theta . \end{aligned} \quad (41)$$

On obtient ainsi l'expression suivante pour $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi . \quad (42)$$

Projetons maintenant $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$ sur la base $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi , \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta} \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \dot{\theta} \cos^2 \theta = -\dot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -\dot{\theta} , \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0 , \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \dot{\phi} \cos \theta . \end{aligned} \quad (46)$$

Et donc $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$ peut s'écrire comme :

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi \quad (47)$$

Il nous reste à projeter $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ sur le repère sphérique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi , \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\phi} \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\dot{\phi} \sin \theta , \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\phi} \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\dot{\phi} \cos \theta , \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi . \end{aligned} \quad (51)$$

On obtient ainsi pour $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta . \quad (52)$$

d) De même que pour les coordonnées polaires et cylindriques :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{OM}) = \frac{d}{dt} (r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi , \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (54)$$