ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

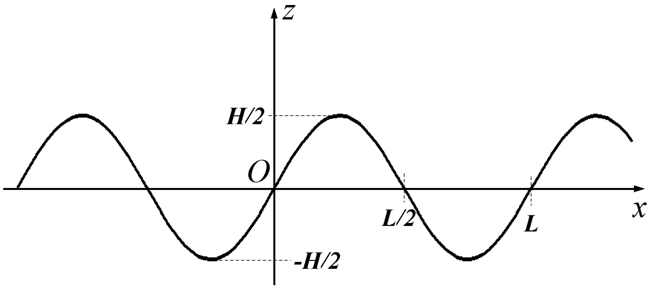
Mécanique - Corrigé de la série 10
2014-2015

Exercice 1, Champ de bosse : le salaire de la peur

a) Le profil $h(x)$ de la route est de la forme,

$$h(x) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad , \tag{1}$$

où H est la hauteur de la bosse (i.e. entre un creux et un sommet) et L est la longueur de la bosse.



Etant donné que le point de contact entre la roue et la route se déplace avec une vitesse horizontale constante v, la position horizontale de ce point de contact est $x = vt$. Ainsi, l'équation du mouvement de ce point $h(t)$ est de la forme

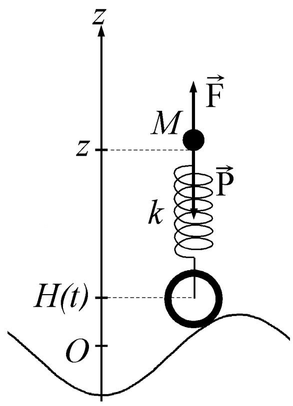
$$h(t) = \frac{H}{2}\sin\left(\frac{2\pi vt}{L}\right) \quad . \tag{2}$$

b) Le mouvement horizontal a lieu à vitesse constante v. Il reste donc à établir l'équation du mouvement selon l'axe vertical

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = M\,\mathbf{g} = Mg\,\hat{\mathbf{z}}$,
- Force de rappel du ressort : $\mathbf{F} = -k\,(z - h(t))\,\hat{\mathbf{z}}$ où la longueur du ressort à vide est négligée.

Loi du mouvement : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F} = M\,\mathbf{a}$.



Selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$, l'équation du mouvement est donc donnée par

$$-Mg - k\,(z - h(t)) = M\ddot{z} \ . \tag{3}$$

L'équation du point de contact (2) implique que l'équation du mouvement (9) peut être réécrite comme,

$$M\ddot{z} + kz + Mg = k\,\frac{H}{2}\sin(\omega t) \quad , \tag{4}$$

où $\quad \omega = \dfrac{2\pi v}{L} \quad .$

A l'aide du changement de variable

$$u = z + \frac{Mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = \ddot{z} \ , \tag{5}$$

l'équation différentielle (4) s'écrit comme,

$$M\ddot{u} + k\,u = k\,\frac{H}{2}\sin(\omega t) \ , \tag{6}$$

b) La solution de l'équation (6) est de la forme

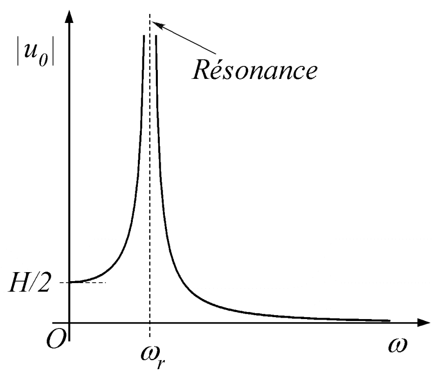
$$u(t) = u_0 \sin(\omega t) \ , \tag{7}$$

comme indiqué dans l'énoncé. En substituant la solution (7) dans l'équation (6), on détermine la forme de l'amplitude u_0 des oscillations, i.e.

$$u_0 = \frac{H}{2\left(1 - \frac{M\omega^2}{k}\right)} \ . \tag{8}$$

Il y a trois comportements différents pour u_0 correspondant à des limites particulières :

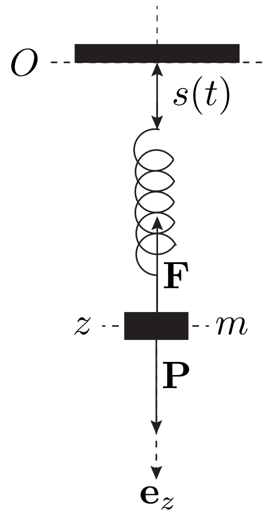
- Faibles amplitudes : $\lim_{\omega\to 0} u_0 = \frac{H}{2}$.
- Résonance : $\lim_{\omega\to\omega_r=\sqrt{k/m}} u_0 = \infty$.
- Amplitude nulle : $\lim_{\omega\to\infty} u_0 = 0$.



La pulsation de résonnace vaut $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le régime de comfort maximal corespond aux grandes pulsations, i.e. $\omega \to \infty$, et donc aux vitesses, i.e. $v \to \infty$.

Exercice 2, Excitation d'un oscillateur harmonique vertical

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel le tube dans lequel coulisse le piston et comme repère l'axe de coordonnée vertical $\mathbf{e}_z$ d'origine O dirigé vers le bas. Le système est la masse m reliée au piston (dont l'équation du mouvement est $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$) par un ressort de constante de rappel k et de longueur à vide l_0.



a) *Bilan des forces extérieures :*

- Poids : $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = mg\,\mathbf{e}_z$,
- Force de rappel du ressort : $\mathbf{F} = -\,k\,(z - l_0 - s(t))\,\mathbf{e}_z$.

Loi du mouvement : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$.

Selon l'axe $\mathbf{e}_z$, l'équation du mouvement est donc donnée par

$$mg - k\,(z - l_0 - s\,(t)) = m\ddot{z}\ . \qquad (9)$$

b) A l'aide du changement de variable

$$u = z - l_0 - \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = \ddot{z}\ , \qquad (10)$$

l'équation différentielle (9) peut être mise sous la forme,

$$-\,ku + ks = m\ddot{u} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}\,(t) + \frac{k}{m}\,u\,(t) = \frac{k}{m}\,s\,(t)\ . \qquad (11)$$

Par comparaison des équations (10) et (11) avec l'énoncé, on en déduit l'expression des constantes c_1 et c_2 données dans l'énoncé, i.e.

$$c_1 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad c_2 = -\,l_0 - \frac{mg}{k}\ . \qquad (12)$$

c) Comme indiqué dans l'énoncé, en régime stationnaire, la solution de l'équation du mouvement (11) est de la forme

$$u\,(t) = u_0 \cos(\omega t)\ , \qquad (13)$$

et le mouvement du piston est donné par,

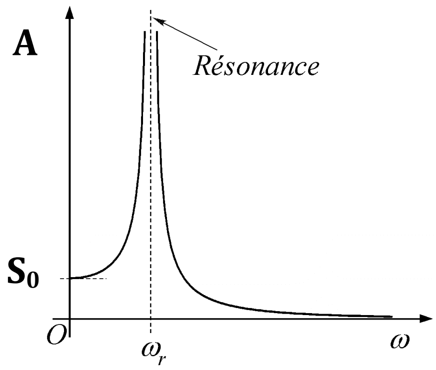
$$s\,(t) = s_0 \cos(\omega t)\ . \qquad (14)$$

En substituant les solutions (13) et (14) dans l'équation du mouvement (11), on détermine la forme de l'amplitude u_0 des oscillations, i.e.

$$u_0 = \frac{s_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\ . \qquad (15)$$

Il y a trois comportements différents pour u_0 correspondant à des limites particulières :

- Faibles amplitudes : $\lim_{\omega \to 0} u_0 = s_0$.
- Résonance : $\lim_{\omega \to \omega_r = \sqrt{k/m}} u_0 = \infty$.
- Amplitude nulle : $\lim_{\omega \to \infty} u_0 = 0$.



La condition de résonance correspond à la divergence de l'amplitude $A = u_0$ des oscillations. Ainsi, la pulsation de résonnance vaut $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Exercice 3, Freinage d'un bloc

a) Les forces agissant selon l'axe vertical sont le poids du bloc de norme mg et la réaction normale de la surface de contact de norme N. Ces forces sont égales et opposées de sorte que

$$N = mg \ . \quad (1)$$

La force de frottement F_f s'oppose au mouvement. Elle est la seule force agissant selon l'axe horizontal. Sa norme vaut

$$F_f = \mu_c N = \mu_c mg \ . \quad (2)$$

L'équation du mouvement selon l'axe horizontal est donc

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = -\mu_c mg = -F_f \ . \quad (3)}$$

En intégrant l'équation du mouvement, on obtient une relation pour la vitesse,

$$\dot{x}(t) = -\mu_c gt + v_0 \ . \quad (4)$$

En intégrant (4), on obtient l'équation horaire,

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}\mu_c gt^2 + v_0\, t \ . \quad (5)}$$

Lorsque le bloc s'arrête, au temps $t = t_f$, sa vitesse est nulle (i.e. $\dot{x}(t_f) = 0$). Par conséquent, de (4), on tire,

$$t_f = \frac{v_0}{\mu_c g} \ . \quad (6)$$

En substituant (6) dans (5) on obtient la distance de freinage

$$\boxed{x_f = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \ . \quad (7)}$$

b) La variation d'énergie cinétique $\Delta E = E_{fin} - E_{in}$ sur la distance de freinage x_f est due au travail de la force de frottement F_f,

$$\Delta E = E_{fin} - E_{in} = -F_f x_f \ , \quad (8)$$

où le signe négatif est dû au fait que la force de frottement s'oppose au mouvement. L'énergie cinétique finale est nulle (i.e. $E_{fin} = 0$) et l'énergie initiale vaut

$$E_{in} = \frac{1}{2}mv_0^2 \ , \quad (9)$$

En substituant (2) et (9) dans (8) on obtient l'expresion pour la distance de freinage,

$$\boxed{x_f = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \ , \quad (10)}$$

qui est identique à (7). La 2^e méthode est nettement plus efficace ! ! !