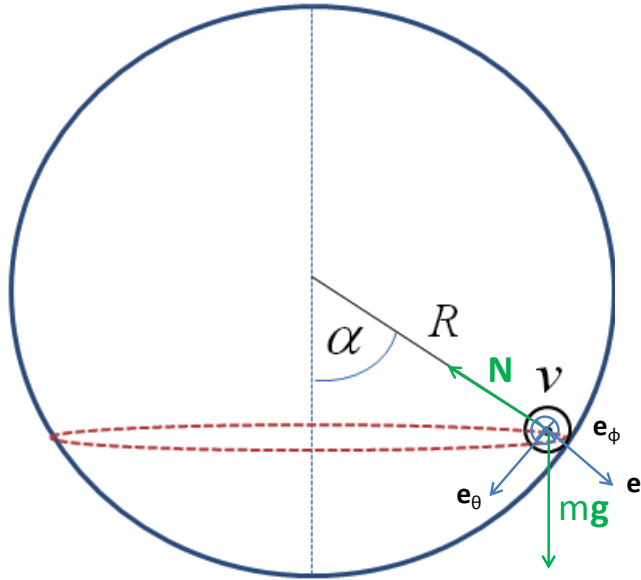


Exercice 1, Boule de la mort

Schéma :



- a) On utilisera un repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$, en accord avec la symétrie du problème. Il y a deux forces en jeu : la pesanteur $m\mathbf{g}$ ainsi que la force de soutien de la sphère $\mathbf{N}$. Ainsi, la seconde loi de Newton nous dit :

$$m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} = mg \sin \alpha \mathbf{e}_\theta + mg \cos \alpha \mathbf{e}_r - N \mathbf{e}_r \quad (1)$$

L'accélération en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (2)$$

Avec les contraintes $r = cste \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (mouvement sur la paroi interne de la sphère, i.e. $r = R$ fixé), $\theta = cste \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\phi} = cste \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$ (pour la situation à l'équilibre décrite), la seconde loi de Newton devient :

$$-mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_r - mr\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta = mg(\sin \alpha \mathbf{e}_\theta + \cos \alpha \mathbf{e}_r) - N \mathbf{e}_r \quad (3)$$

En projection :

$$\mathbf{e}_r : -mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = mg \cos \alpha - N \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_\theta : -mr\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta = mg \sin \alpha \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_\phi : 0 = 0 \quad (6)$$

D'après la seconde équation selon $\mathbf{e}_\theta$:

$$-mr\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta = mg \sin \alpha \Leftrightarrow R^2 \dot{\phi}^2 = -\frac{rg}{\cos \theta} = \frac{Rg}{\cos \alpha} \quad (7)$$

Car $\alpha = \pi - \theta$ et donc $\sin \alpha = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ et $\cos \alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$.

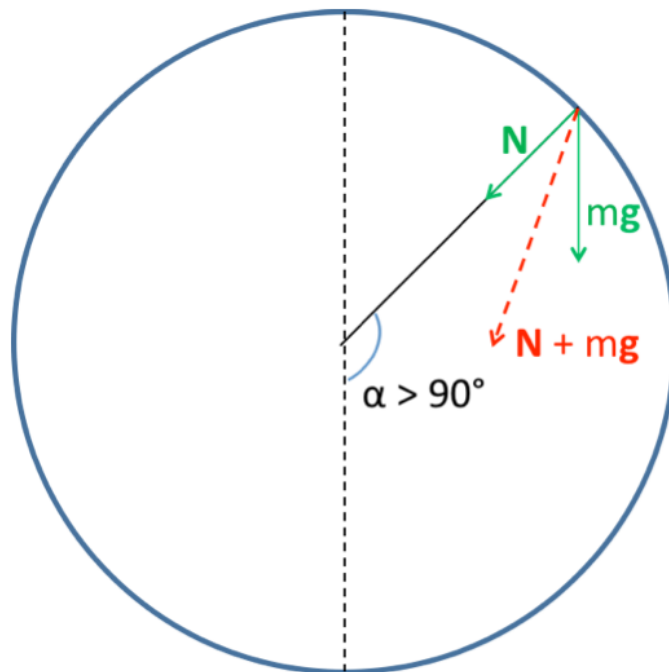
Par ailleurs, la vitesse s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi \text{ avec } \dot{r} = \dot{\theta} = 0 \quad (8)$$

Et donc :

$$\mathbf{v} = r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi = \sqrt{-\frac{rg}{\cos\theta}}\sin\theta\mathbf{e}_\phi = \sqrt{\frac{Rg}{\cos\alpha}}\sin\alpha\mathbf{e}_\phi \quad (9)$$

- b) Pour que le mouvement du motard puisse être circulaire uniforme, il faut que son accélération soit uniquement radiale, c'est-à-dire que la résultante des forces ne doit avoir qu'une composante horizontale, dirigée vers l'axe central de la sphère. Or donc les composantes verticales de la force de pesanteur et de la force de soutien de la sphère doivent pouvoir se contrebalancer, ce qui n'est plus possible si l'angle α est supérieur à 90° car alors la composante verticale de la force de soutien est dirigée vers le bas, donc dans le même sens que la force de pesanteur.



Exercice 2, Chute sur sphère

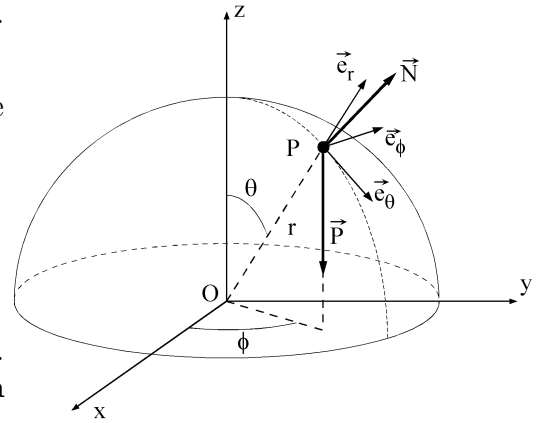
Système et repère : Le système est la masse m au point P . On choisit le repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ d'origine O .

Contrainte : Le point est astreint à se déplacer sur une sphère de rayon R : $r = R = \text{cst} \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$.

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg (-\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$,
- Réaction normale de la sphère : $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_r$.

a) *Equation du mouvement* : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = m \mathbf{a}$.
En tenant compte des contraintes, l'accélération $\mathbf{a}$ est exprimée en coordonnées sphériques comme,



$$\mathbf{a} = -R \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + R \left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \right) \mathbf{e}_\theta + R \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi .$$

L'équation du mouvement s'écrit donc en composantes comme,

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : \quad N - mg \cos \theta = -mR \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) , \quad (10)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\theta : \quad mg \sin \theta = mR \left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \right) , \quad (11)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : \quad 0 = mR \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \right) . \quad (12)$$

Etant donné que les forces extérieures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ sont dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{e}_\phi$, il n'y a pas d'accélération selon la direction $\mathbf{e}_\phi$. La masse commence à glisser sans vitesse initiale depuis le sommet. Par conséquent, son mouvement a lieu selon un angle ϕ constant, i.e. $\dot{\phi} = 0$ et $\ddot{\phi} = 0$. Ainsi l'équation (12) est identiquement nulle et les équations (10) et (11) se réduisent à la description d'un mouvement en coordonnées polaires dans un plan vertical, i.e.

$$N - mg \cos \theta = -mR \dot{\theta}^2 , \quad (13)$$

$$mg \sin \theta = mR \ddot{\theta} . \quad (14)$$

b) La masse décolle de la sphère lorsque la réaction normale de la sphère devient nulle (i.e. $N = 0$). On quitte alors les conditions de contrainte. On résout les équations (13) et (14) par une **méthode à retenir**. On multiplie l'équation (14) par $\frac{\dot{\theta}}{mR}$, i.e.

$$\frac{g}{R} \dot{\theta} \sin \theta = \dot{\theta} \ddot{\theta} . \quad (15)$$

Les membres de gauche et de droite de l'équation peuvent être mis sous la forme de dérivées par rapport au temps, i.e.

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{g}{R} \cos \theta \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) . \quad (16)$$

En intégrant l'équation (16) par rapport au temps, on obtient,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + C. \quad (17)$$

où C est la constante d'intégration. En tenant compte des conditions initiales, i.e. $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow C = g/R$, l'équation (17) devient,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1 - \cos\theta). \quad (18)$$

Lorsque la masse décolle (i.e. $N = 0$), l'équation du mouvement (13) peut être mise sous la forme,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{2R}\cos\theta. \quad (19)$$

Par comparaison des équations (18) et (19), la condition de décollage s'écrit

$$\cos\theta = \frac{2}{3}. \quad (20)$$

Il est important de constater que cette condition est indépendante de R , m et g . C'est un résultat purement géométrique!

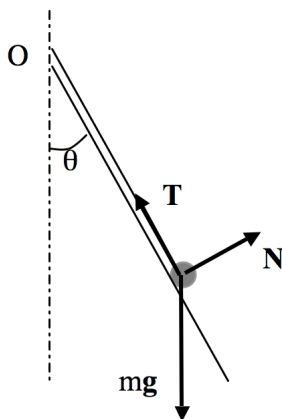
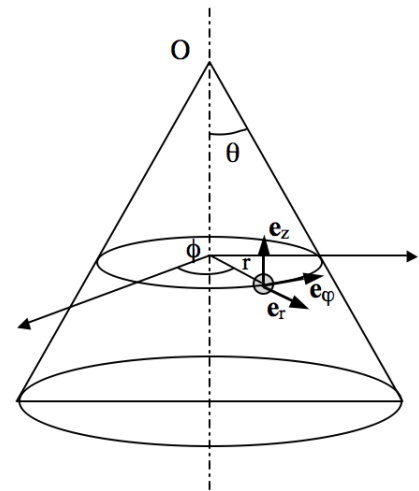
Exercice 3, Point sur cône avec fil

On choisit un repère pratique pour exprimer les composantes des forces et les conditions imposées par les contraintes :

Coordonnées cylindriques : r, ϕ, z .

Contraintes : $r = r_0 = \text{const}$ et $z = \text{const}$

$$\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \text{ et } \dot{z} = \ddot{z} = 0$$



Le point matériel est soumis aux forces suivantes :

- Tension du fil : $\mathbf{T} = T(-\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_z)$
- Réaction du cône : $\mathbf{N} = N(\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_z)$
- Pesanteur : $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$
- Frottement visqueux : $-b\mathbf{v} = -b(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z) = -br_0\dot{\phi}\mathbf{e}_z$
- Force de traction : $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_\phi$

- a) *Equations du mouvement* : $m\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{e}_j$ où $\mathbf{F}_i = \mathbf{T}, \mathbf{N}, m\mathbf{g}, -b\mathbf{v}, \mathbf{F}$; $j = r, \phi, z$. Remarque : Pour l'expression de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{v}$, on prend les expressions du cours pour les coordonnées cylindriques. Cela donne les équations du mouvement :

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : -mr_0\dot{\phi}^2 = -T \sin \theta + N \cos \theta , \quad (21)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : mr_0\ddot{\phi} = -br_0\dot{\phi} + F , \quad (22)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_z : 0 = T \cos \theta + N \sin \theta - mg . \quad (23)$$

- b) Pour trouver T il faut combiner (21) et (23), mais il faut d'abord connaître le terme $mr_0\dot{\phi}^2$, *i.e.* $\dot{\phi}$. Pour cela, on considère (22) et on cherche une solution $\dot{\phi}(t)$:

$$\ddot{\phi} + (b/m)\dot{\phi} = F/mr_o \quad (24)$$

L'équation homogène associée est $\ddot{\phi} + (b/m)\dot{\phi} = 0$, dont la solution est $\dot{\phi}(t) = A \exp(-bt/m)$; La solution est donc $\dot{\phi}(t) = A \exp(-bt/m) + F/br_0$. La condition initiale $\dot{\phi}(t=0) = 0$ détermine A et finalement :

$$\dot{\phi}(t) = F/br_0[1 - \exp(-bt/m)] \quad (25)$$

Par (21) et (23), on obtient :

$$N = -mr_0\dot{\phi}^2 \cos \theta + mg \sin \theta \quad (26)$$

$$T = mr_0\dot{\phi}^2 \sin \theta + mg \cos \theta \quad (27)$$

Remarque : Les forces des contraintes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ dépendent de la vitesse $r_0\dot{\phi}^2$, donc ils varient avec le temps t .

- c) La condition de décollage s'exprime comme $N = 0 \implies mr_0\dot{\phi}^2 \cos \theta = mg \sin \theta$. Et on obtient :

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta} \quad (28)$$

D'où, en reprenant l'expression (25),

$$F/br_0[1 - \exp(-bt/m)] = \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta} \implies t = -\left(\frac{m}{b}\right) \ln \left[1 - \left(\frac{br_o}{F}\right) \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta}\right] \quad (29)$$

Remarque : On observera le point décoller seulement si l'expression (29) admet des solutions, *i.e.* si $\left[1 - (br_o/F) \sqrt{g/r_0 \tan \theta}\right] > 0$, $(F/br_o) > \sqrt{g/r_0 \tan \theta}$, c'est-à-dire si la vitesse (angulaire) limite atteignable selon l'action de $\mathbf{F}$ et le freinage dû au coefficient b est plus grande que la vitesse de décollement (qui dépend de la pesanteur et de θ).

Pour $t > 0$, $1 - (br_o/F) \sqrt{g/r_0 \tan \theta} < 1$