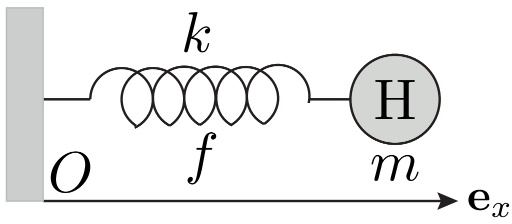
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 5
2014-2015

Exercice 1, Fréquence de vibrations moléculaires

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel la surface métallique et comme repère l'axe de coordonnée horizontal $\boldsymbol{e}_x$ d'origine O dirigé vers la droite. Le système est l'atome d'hydrogène de masse m lié à la surface métallique par un ressort de constante de rappel k et de fréquence de vibration f.



Bilan des forces extérieures :

- Force de rappel du ressort : $\boldsymbol{F} = -\,k\,(x - l_0)\,\boldsymbol{e}_x$ où l_0 est la longueur du ressort à vide,
- Poids : il est négligé ici parce qu'il est très petit comparé à la force de rappel.

Loi du mouvement : $\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$.

Selon l'axe $\boldsymbol{e}_x$, l'équation du mouvement est donc donnée par

$$-\,k\,(x - l_0) = m\ddot{x}\ . \tag{1}$$

a) A l'aide du changement de variable

$$u = x - l_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = \ddot{x}\ , \tag{2}$$

l'équation différentielle (1) s'écrit comme,

$$m\ddot{u} + k\,u = 0\ , \tag{3}$$

et décrit un **mouvement oscillatoire harmonique**. La solution de cette équation (3) est du type

$$u\,(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = -\,A\omega^2\cos\left(\omega t + \phi\right)\ . \tag{4}$$

En substituant cette soution (4) dans l'équation du mouvement (3), on obtient la pulsation des oscillations, i.e.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ . \tag{5}$$

Etant donné que la pulsation ω est liée à la fréquence de vibration f par

$$\omega = 2\pi f\ , \tag{6}$$

la constante de rappel k est de la forme,

$$k = 4\pi^2 f^2 m\ . \tag{7}$$

Application numérique : $k = 6.59\,\text{kg/s}^2$.

Exercice 2, Conditions initiales pour un oscillateur harmonique

L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est donnée par

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ . \tag{8}$$

a) En utilisant la formule de trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ ,$$

l'équation du mouvement (8) peut être mise sous la forme

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi) = C\cos(\omega t)\cos\phi - C\sin(\omega t)\sin\phi = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \tag{9}$$

ce qui implique que les constantes sont reliées par,

$$\begin{aligned} A &= C\cos\phi \ , \\ B &= -C\sin\phi \ . \end{aligned} \tag{10}$$

b) L'équation de la vitesse $v(t)$ est obtenue en prenant la dérivée de l'équation (8) de la position $x(t)$ par rapport au temps, i.e.

$$v(t) = -C\omega\sin(\omega t + \phi) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \ . \tag{11}$$

A $t = 0$, la condition initiale sur la position $x(t)$ vaut,

$$x_0 = x(0) = C\cos\phi = A \ , \tag{12}$$

et la condition initiale sur la vitesse $x(t)$ vaut,

$$v_0 = v(0) = -C\omega\sin\phi = B\omega \ . \tag{13}$$

En divisant l'équation (13) par l'équation (12), on obtient une expression pour le déphasage ϕ en fonction des conditions initiales et de la pulsation ω, i.e.

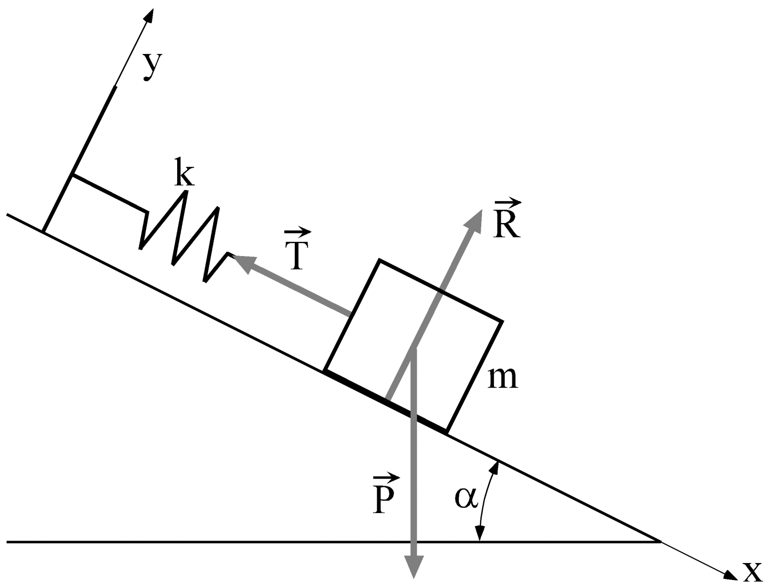
$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \ . \tag{14}$$

Des équations (12), (13) et (14), on déduit l'expression des constantes en fonction des conditions initiales et de la pulsation ω, i.e.

$$\begin{aligned} A &= x_0 \ , \\ B &= \frac{v_0}{\omega} \ , \\ C &= \frac{x_0}{\cos\phi} = \frac{x_0}{\cos\left(\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)\right)} \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Exercice 3, Oscillateur sur plan incliné

On se place dans le repère cartésien Oxy.



a) Bilan des forces :
- La pesanteur $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} = mg(\sin\alpha\boldsymbol{e_x} - \cos\alpha\boldsymbol{e_y})$
- La réaction du support $\boldsymbol{R} = R\boldsymbol{e_y}$
- La traction du ressort $\boldsymbol{T} = -kx\boldsymbol{e_x}$

b) Il n'y a pas de mouvement selon Oy, ce qui donne $R = mg\cos\alpha$. La seconde loi de Newton selon Ox donne l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - kx \tag{16}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. En réalisant le changement de variable $u = x - \dfrac{mg}{k}\sin\alpha$, on retombe sur l'écriture connue :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{17}$$

c) La solution générale de l'équation (16) est du type $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Ce qui donne la condition $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Avec la relation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, on arrive à la solution $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.