ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 18

2014-2015

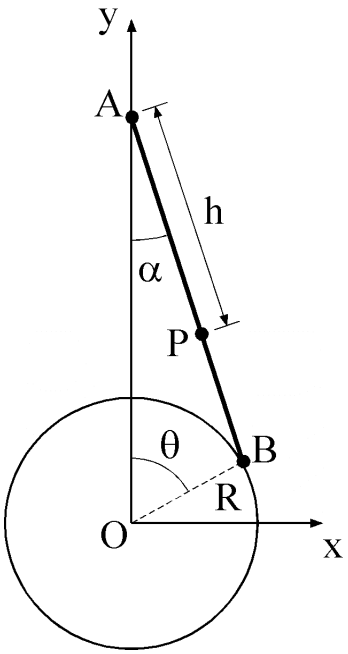
Exercice 1, Piston et Bielle

a) Un point P quelconque de la barre AB est repéré par sa distance h au point A. Dans un repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, la position $\mathbf{x}_P$ de P est donnée par,

$$\mathbf{x}_P = h\,\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + \Big(R\cos\theta + (L - h)\cos\alpha\Big)\mathbf{e}_y\ . \qquad (1)$$

La vitesse $\mathbf{v}_P$ est obtenue par dérivation de $\mathbf{x}_P$ par rapport au temps, i.e.

$$\mathbf{v}_P = h\dot{\alpha}\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_x - \Big(R\dot{\theta}\,\sin\theta + (L - h)\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_y\ . \qquad (2)$$



b) De manière similaire, la position $\mathbf{x}_A$ et la vitesse $\mathbf{v}_A$ du point A (i.e. $h = 0$) sont respectivement exprimés dans un repère cartésien comme,

$$\mathbf{x}_A = \Big(R\cos\theta + L\,\cos\alpha\Big)\mathbf{e}_y\ , \qquad (3)$$

$$\mathbf{v}_A = -\Big(R\dot{\theta}\,\sin\theta + L\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_y\ . \qquad (4)$$

Les expressions des vitesses (2) et (4) sont liées par

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + h\dot{\alpha}\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_y)\ . \qquad (5)$$

D'autre part,

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{AP} = \dot{\alpha}\,\mathbf{e}_z \times h\,(\sin\alpha\,\mathbf{e}_x - \cos\alpha\,\mathbf{e}_y) = h\dot{\alpha}\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_y)\ . \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) impliquent que,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{AP}\ . \qquad (7)$$

c) Les angles θ et α ne sont pas indépendants. Ils sont liés par

$$R\,\sin\theta = L\,\sin\alpha\ , \qquad (8)$$

dont la dérivée par rapport au temps vaut,

$$R\dot{\theta}\,\cos\theta = L\,\dot{\alpha}\,\cos\alpha\ . \qquad (9)$$

En utilisant la relation (9), l'équation (2) peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \dot{\alpha}\Big\{h\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_x - \Big(L\,\cos\alpha\,\tan\theta + (L - h)\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_y\Big\}\\ &= \dot{\alpha}\,\mathbf{e}_z \times \Big\{-\Big(L\,\cos\alpha\,\tan\theta + (L - h)\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_x - h\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_y\Big\} \qquad (10)\\ &= \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \Big\{-\Big(L\,\cos\alpha\,\tan\theta + (L - h)\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_x - h\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_y\Big\} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{IP}\ .\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{IP} = \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_I = -\Big(L\,\cos\alpha\,\tan\theta + (L - h)\sin\alpha\Big)\mathbf{e}_x - h\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_y\ . \qquad (11)$$

Finalement, les équations (1), (8) et (11) impliquent que la position $\mathbf{x}_I$ du point I est de la forme,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_P - \mathbf{IP} &= L\,(\sin\alpha + \cos\alpha\,\tan\theta)\,\mathbf{e}_x + (R\,\cos\theta + L\,\cos\alpha)\,\mathbf{e}_y \\ &= L\left[(\sin\alpha + \cos\alpha\,\tan\theta)\,\mathbf{e}_x + \left(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta} + \cos\alpha\right)\,\mathbf{e}_y\right]\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Physiquement, le point I représente le centre instantané de rotation.

Exercice 2, Hypocycloïde

a) La vitesse $\mathbf{v}_M$ d'un point quelconque M du petit cylindre est donnée par

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{AM}\,, \tag{13}$$

où $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ est le vecteur axial de rotation propre du petit cyclindre. Dans le cas particulier du point de contact P (i.e. $M = P$), la condition de roulement sans glissement,

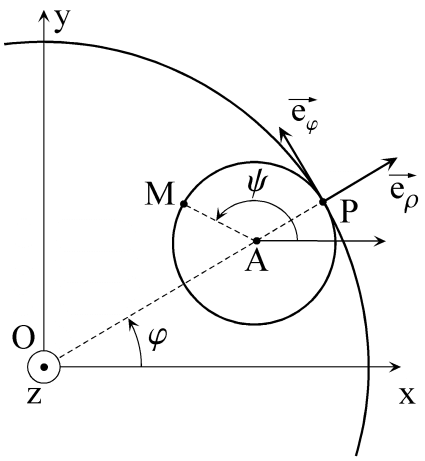
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{0}\,, \tag{14}$$

et l'expression de la vitesse du centre de masse du petit cylindre

$$\mathbf{v}_A = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{OA}\,, \tag{15}$$

impliquent que l'équation (13) se réduit à,

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{OA} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{AP} = \mathbf{0}\,. \tag{16}$$



La projection des deux termes de l'équation (16) dans le repère cylindrique $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ donne

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{OA} &= (R - R')\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = (R - R')\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi\,, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{AP} &= R'\dot{\psi}\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = R'\dot{\psi}\,\mathbf{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$

Ainsi la projection de l'équation (16) selon l'axe $\mathbf{e}_\varphi$ donne,

$$(R - R')\,\dot{\varphi} + R'\dot{\psi} = 0\,. \tag{17}$$

b) Le vecteur **OM** est exprimée en coordonnées cartésiennes comme, i.e.

$$\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} = (R - R')\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + R'\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

Les équations paramétriques de l'hypocycloïde sont donc de la forme,

$$\begin{aligned}x_M &= (R - R')\cos\varphi + R'\,\cos\psi\,, \\ y_M &= (R - R')\sin\varphi + R'\,\sin\psi\,.\end{aligned} \tag{19}$$

Les angles φ et ψ sont couplés. On peut définir leur couplage en intégrant la condition (17) de roulement sans glissement par rapport au temps. Il y a donc un seul degré de liberté : φ ou ψ.