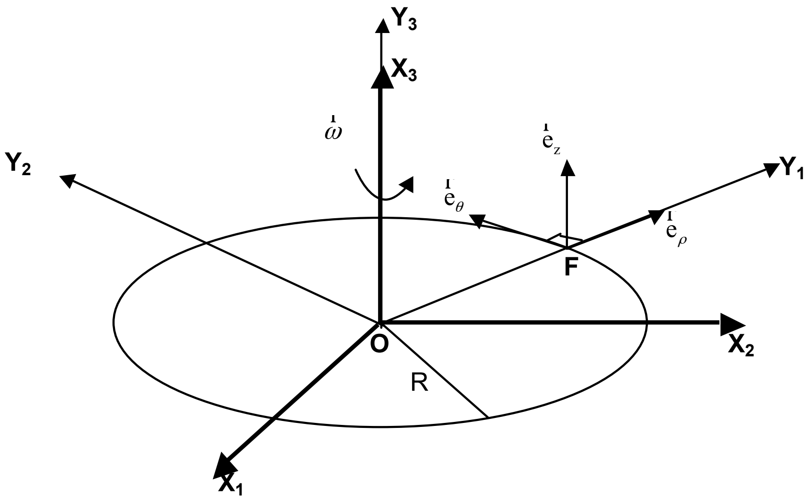
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 16
2014-2015

Exercice 1, Fourmi immobile



Système, référentiels et repères : Le système est la fourmi qui est assimilée à un point matériel F de masse m. Le référentiel absolu est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ et le référentiel relatif du tourne-disque est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ et un repère cylindrique $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Le référentiel relatif est en mouvement autour de l'axe $\mathbf{X}_3 = \mathbf{Y}_3$ par rapport au référentiel absolu avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$.

Contraintes : La trajectoire de la fourmi est un cercle de rayon R, i.e. $r = R = \text{cst} \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. La fourmi paraît immobile par rapport à un disque qui tourne à vitesse angulaire constante ω, i.e. $\dot{\theta} = \omega = \text{cste} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = 0$. L'origine O est sur l'axe de rotation. Donc, sa vitesse et son accélération absolue sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(O) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(O) = \mathbf{0}$.

a) En tenant compte des contraintes (i.e. $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), la vitesse absolue $\mathbf{v}_a(F)$ et l'accélération absolue $\mathbf{a}_a(F)$ de la fourmi au point F sont de la forme

$$\underbrace{\mathbf{v}_a(F)}_{\text{vit. absolue}} = \underbrace{\mathbf{v}_r(F)}_{\text{vit. relative}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}}_{\text{vit. d'entraînement}} , \tag{1}$$

$$\underbrace{\mathbf{a}_a(F)}_{\text{acc. absolue}} = \underbrace{\mathbf{a}_r(F)}_{\text{acc. relative}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF})}_{\text{acc. centripète}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F)}_{\text{acc. de Coriolis}} . \tag{2}$$

Vu que la fourmi est immobile dans le référentiel absolu, sa vitesse et son accélération absolues sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(F) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(F) = \mathbf{0}$. Par conséquent, la vitesse relative (1) et l'accélération relative (2) de la fourmi sont de la forme,

$$\mathbf{v}_r(F) = -\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF} , \tag{3}$$

$$\mathbf{a}_r(F) = -\underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF})}_{\text{acc. centripète}} - \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F)}_{\text{acc. de Coriolis}} . \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) impliquent que l'accélération de Coriolis et l'accélération centripète sont respectivement de la forme,

$$2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F) = -\,2\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}) = -2\,\omega^2 R\,\mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\rho) = 2\omega^2 R\,\mathbf{e}_\rho , \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}) = \omega^2 R\,\mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\rho) = -\,\omega^2 R\,\mathbf{e}_\rho , \tag{6}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{OF} = R\,\mathbf{e}_\rho$.

Exercice 2, Guillaume Tell

a) Simple problème de balistique :

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \;\Rightarrow\; \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{g} \;\Rightarrow\; m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{7}$$

On projette sur les axes Oz, vertical, et Ox, horizontal (dans le sens du mouvement) :

$$0 = ma_x \tag{8}$$
$$-mg = ma_z \tag{9}$$

et donc, en intégrant l'accélération une, puis deux fois, on obtient respectivement la vitesse et la position du carreau :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \;\Rightarrow\; v_x(t) = v_{0,x} \;\Rightarrow\; x(t) = v_{0,x}\cdot t + x_0 \\ a_z = -g \;\Rightarrow\; v_z(t) = -gt + v_{0,z} \;\Rightarrow\; z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t + z_0 \end{cases} \tag{10}$$

avec

$$\begin{cases} x_0 = z_0 = 0 \\ v_{0,z} = 0 \\ v_{0,x} = v_0 \end{cases} \tag{11}$$

On cherche t_{max} tel que $x(t_{max}) = D$:

$$x(t_{max}) = D \;\Leftrightarrow\; v_0 t_{max} = D \;\Leftrightarrow\; t_{max} = \frac{D}{v_0} \tag{12}$$

Et donc la déviation verticale sera de $z(t_{max})$:

$$z(t_{max}) = -\frac{1}{2}\frac{gD^2}{v_0^2} = 4.9cm \tag{13}$$

b) La force de Coriolis va incurver la trajectoire vers l'ouest, et la force centrifuge va réduire la déviation due à la pesanteur.

c) Si l'on se place dans un référentiel lié à la Terre, la seconde loi de Newton nous donne $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - 2m\mathbf{\Omega}(t)\wedge\mathbf{v} - m\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{R}) \tag{14}$$

Avec $\mathbf{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre, $\mathbf{v}$ la vitesse du projectile et $\mathbf{R}$ le rayon vecteur à l'axe de la rotation de la Terre.
Ce qui nous donne en projection (les axes x et z sont dirigés comme précédemment, l'axe y est dirigé vers l'est, λ est la latitude) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \Omega^2 R\sin\lambda\cos\lambda \\ \ddot{y} = -2\Omega(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y}\cos\lambda + \Omega^2 R\cos^2\lambda \end{cases} \tag{15}$$

d) Pour estimer l'effet de la force de Coriolis, on négligera les termes en $\dot{z}$ et en $\dot{y}$ devant ceux en $\dot{x}$, et on négligera l'effet de l'accélération centrifuge. On trouve pour la seconde équation :

$$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin\lambda \tag{16}$$

En intégrant deux fois, et en approximant $\dot{x}$ par sa valeur calculée en a) :

$$\dot{y}(t) = -2\Omega x(t)\sin\lambda = -2\Omega v_0 t\sin\lambda \tag{17}$$
$$y(t) = -\Omega v_0 t^2 \sin\lambda \tag{18}$$

Avec $t_{max} = \dfrac{D}{v_0}$, on obtient finalement :

$$y(t_{max}) = -\Omega v_0 t_{max}^2 \sin\lambda = -\Omega\frac{D^2}{v_0}\sin\lambda = -0.53 \text{ mm} \tag{19}$$

soit 0.53 mm vers l'ouest.

Exercice 3, Le jet d'eau de Genève

Dans le référentiel (accéléré) terrestre, la seconde loi de Newton s'écrit, en négligeant la force centrifuge :

$$m\boldsymbol{a}_r = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_C \ , \tag{20}$$
$$\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r \ , \tag{21}$$

avec $\boldsymbol{a}_r$ ($\boldsymbol{v}_r$) l'accélération (la vitesse) dans le référentiel accéléré, m la masse d'une goutte d'eau, $\boldsymbol{F}_C$ la force de Coriolis et $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire de la Terre.

On peut simplifier l'équation par m :

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r \ . \tag{22}$$

On utilise maintenant l'indication selon laquelle $\boldsymbol{F}_C$ influe très peu sur la vitesse :

$$\boldsymbol{a}_r \approx \boldsymbol{g} \ , \tag{23}$$

d'où l'on tire que :

$$\boldsymbol{v}_r \approx \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t \ , \tag{24}$$

qui se projette $v_r \approx v_0 - gt$ sur un axe Oz vertical. Le temps de montée est ainsi déterminé par $\boldsymbol{v}_r(t_m) = 0$ soit $t_m = \frac{v_0}{g}$, et la hauteur maximale par $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Pour déterminer la norme de la vitesse initiale v_0 et connaissant la hauteur maximale h, on utilise la conservation de l'énergie pour une goutte d'eau :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \ . \tag{25}$$

Et donc :

$$t_m = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{26}$$

Puis on introduit la vitesse donnée par l'équation 24 dans l'équation du mouvement 22 :

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t) \ . \tag{27}$$

On intègre cette équation :

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{g}t - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}t^2 - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_0 t + cste \ , \tag{28}$$

$$\boldsymbol{v}_r(t=0) = \boldsymbol{v}_0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{g}t - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}t^2 - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{v}_0 \ . \tag{29}$$

On intègre une seconde fois afin de déterminer la position $\boldsymbol{r}_r$ de la goutte d'eau :

$$\boldsymbol{r}_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}t^3 - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_0 t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + cste \ , \tag{30}$$

$$\boldsymbol{r}_r(t=0) = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r}_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{g}t^3 + \boldsymbol{v}_0 t^2\right)}_{\text{déviation due à la force de Coriolis}} \ . \tag{31}$$

En utilisant les équations (25) et (26) on obtient une déviation vers l'ouest Δl de :

$$\Delta l = \Omega \cos\lambda \frac{4h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{32}$$

Ce qui donne une valeur numérique d'environ 5 cm pour une hauteur du jet d'eau de 140 m.