ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 24
2014-2015

Exercice 1, Durée de vie du soleil

Etant donné que le rayon de la terre r est négligeable par rapport à la distance terre-soleil d, i.e. $r \ll d$, les rayons du soleil arrivent quasiment parallèles à la surface de la terre qui peut être assimilée à un disque de rayon r.

L'énergie des rayons lumineux du soleil est produite par conversion d'énergie de masse E_0 en énergie de rayonnement. Donc, la puissance de rayonnement est égale à la variation d'énergie de masse par unité de temps, i.e.

$$PS = \frac{dE_0}{dt} = \frac{dM}{dt}\,c^2 \ , \tag{1}$$

où S est la surface exposée au rayonnement. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps nécessaire à produire un rayonnement sur une surface exposée S est donnée par,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{PS}{c^2} \ . \tag{2}$$

a) La surface de la terre exposée perpendiculairement aux rayons lumineux du soleil est un disque de surface $S = \pi r^2$. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps $\frac{dM(T)}{dt}$ nécessaire à produire le rayonnement reçu par la terre vaut,

$$\frac{dM(T)}{dt} = \frac{\pi r^2 P}{c^2} = 1.96\,\mathrm{kg/s} \ . \tag{3}$$

b) La surface totale exposée perpendiculairement aux rayons lumineux du soleil à une distance d est une sphère de surface $S = 4\pi d^2$. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps $\frac{dM}{dt}$ nécessaire à produire le rayonnement total émis par le soleil vaut,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi d^2 P}{c^2} = 4.31 \cdot 10^9\,\mathrm{kg/s} \ . \tag{4}$$

c) La réaction nucléaire de fusion des protons (i.e. de l'hydrogène ionisé H^+) implique que le défaut de masse m d'une réaction et le défaut de masse $M = Nm$ de l'ensemble des N réactions valent,

$$m = 4m(\mathrm{p}) - m(\mathrm{He}^4) \quad \Rightarrow \quad Nm = N\left(4m(\mathrm{p}) - m(\mathrm{He}^4)\right) \quad \Rightarrow \quad M = 4M(\mathrm{p}) - M(\mathrm{He}^4) \ . \tag{5}$$

La variation de masse de protons solaires par unité de temps est liée à la variation de masse solaire par unité de temps par,

$$\frac{dM(\mathrm{p})}{dt} = \frac{4M(\mathrm{p})}{4M(\mathrm{p}) - M(\mathrm{He}^4)} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{4m(\mathrm{p})}{4m(\mathrm{p}) - m(\mathrm{He}^4)} \cdot \frac{dM}{dt} \ . \tag{6}$$

Ainsi, les expressions (4) et (6) impliquent que

$$\frac{dM(\mathrm{p})}{dt} = \frac{4m(\mathrm{p})}{4m(\mathrm{p}) - m(\mathrm{He}^4)} \cdot \frac{4\pi d^2 P}{c^2} = 6.56 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg/s} \ . \tag{7}$$

d) La durée de vie du soleil est donnée par,

$$T = \frac{M_S}{\frac{dM(\text{p})}{dt}} = 3.08 \cdot 10^{18}\,\text{s} = 9.76 \cdot 10^{10}\,\text{ans} \,. \tag{8}$$

En 1926, Sir Arthur EDDINGTON annonce que si le Soleil était constitué d'hydrogène pur, il pourrait briller pendant environ 100 *milliards d'années en consommant* $6 \cdot 10^{11}$ *kg d'hydrogène par seconde.*

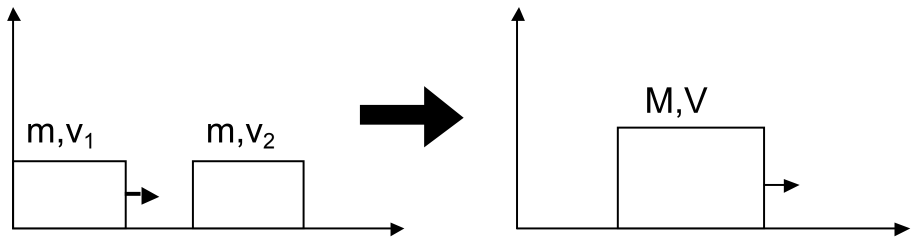
Ce temps est très supérieur à l'age de l'univers qui a déjà connu l'existence et l'extinction d'étoiles de taille relativement similaire à celle du soleil. On voit donc que ce modèle est trop simple pour tenir compte de l'intégralité des mécanismes d'évolution stellaire. On doit tenir compte notamment du fait que seul l'hydrogène contenu dans le noyau solaire est à une température suffisante pour autoriser la fusion.

Table 1 – Composition chimique du soleil

Hydrogène	92.1%	Fer	0.0037%
Hélium	7.8%	Silicium	0.0031%
Oxygène	0.061%	Magnésium	0.0024%
Carbone	0.030%	Sulfure	0.0015%
Azote	0.0084%	Autres	0.0015%
Néon	0.0076%		

Exercice 2, Collisions totalement inélastiques

Plaçons-nous dans un référentiel dans lequel $v_2 = 0$ et $v_1 = v$. Nous allons appliquer le principe de conservation de la partie temps et de la partie espace de la quantité de mouvement généralisée (quadri-vecteur) pour le système composé des deux masses avant et après la collision.



On note $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. M et V sont respectivement la masse et la vitesse du système après collision. Ainsi nous avons :

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)MV \tag{9}$$

$$\gamma(v)mc^2 + mc^2 = \gamma(V)Mc^2 \tag{10}$$

En remplaçant la partie droite de (10), après simplification par c^2, dans (9) on obtient :

$$\gamma(v)mv = V(\gamma(v)m + m) \implies V = \frac{\gamma(v)v}{1 + \gamma(v)} \tag{11}$$

En remplaçant l'expression de V dans (9) on obtient :

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)M\frac{\gamma(v)v}{1 + \gamma(v)} \implies M = \left(\frac{1 + \gamma(v)}{\gamma(V)}\right) m \tag{12}$$

Calculons la différence d'énergie cinétique entre l'instant final et l'instant initial. Avant la collision l'énergie cinétique T_{init} est définie par la différence entre l'énergie due à la vitesse v de la première masse et son énergie au repos (pas de contribution de la seconde masse immobile dans le référentiel choisi) :

$$T_{init} = \gamma(v)mc^2 - mc^2 = (\gamma(v) - 1)mc^2 \tag{13}$$

Après la collision l'énergie cinétique T s'écrit :

$$T_{final} = \gamma(V)Mc^2 - Mc^2 = \gamma(V)\left(\frac{1+\gamma(v)}{\gamma(V)}\right)mc^2 - Mc^2 = (1+\gamma(v))mc^2 - Mc^2 \tag{14}$$

Ainsi la variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta T = (1+\gamma(v))mc^2 - Mc^2 - (\gamma(v) - 1)mc^2 = (2m - M)c^2 \tag{15}$$

Ce qui correspond à l'énergie liée au défaut de masse $\Delta T = \Delta mc^2$.

Exercice 3, Accélérateur de particules

a) L'énergie cinétique T_{cl} non-relativiste des électrons lorsque leur vitesse serait égale à celle de la lumière $v = c$ (n.b. ce qui est évidemment impossible dans le cas relativiste) vaudrait,

$$T_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2}mc^2 = \frac{E_0}{2} \; . \tag{16}$$

Etant donné que l'énergie cinétique des électrons augmente de manière régulière en fonction de la distance parcourue, on obtient la relation,

$$\frac{T}{d} = \frac{T_{\mathrm{cl}}}{\bar{d}} = \frac{E_0}{2\bar{d}} \; . \tag{17}$$

Ainsi la distance $\bar{d}$ parcourue par les électrons serait,

$$\bar{d} = \frac{dE_0}{2T} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 8.18 \cdot 10^{-14}}{2 \cdot 7.53 \cdot 10^{-9}}\,\mathrm{m} = 1.63\,\mathrm{cm} \; . \tag{18}$$

Dans le cas non-relativiste, il suffirait donc de construire des accélérateurs d'une longueur de quelques centimètres pour que les électrons atteingent une vitesse égale à celle de la lumière. Ce résultat est clairement faux ! On a jamais observé des électrons atteignant la vitesse de la lumière, même lorsqu'ils sortent du LINAC après avoir parcouru une distance de 3000 m ! Ce simple calcule montre que pour des accélérateurs de particules où les électrons atteignent des vitesses proches de celle de la lumière on doit tenir compte des effets relativistes.

b) A la sortie de l'accélérateur, l'énergie cinétique T des électrons est donnée par

$$T = (\gamma - 1)\,mc^2 = (\gamma - 1)\,E_0 \; , \tag{19}$$

où

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \; . \tag{20}$$

Ainsi, dans la limite où $T \gg E_0$,

$$\gamma \simeq \frac{T}{E_0} \gg 1 \; , \tag{21}$$

ce qui implique que

$$\frac{v}{c} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{T}\right)^2} \; . \tag{22}$$

Ainsi, la différence relative entre v et c vaut,

$$\delta = 1 - \frac{v}{c} \simeq 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{T}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{8.18 \cdot 10^{-14}}{7.53 \cdot 10^{-9}}\right)^2} = 5.90 \cdot 10^{-11} \; , \tag{23}$$

ce qui est minime !

c) Dans le référentiel où les électrons sortants sont immobiles, la longueur mesurée du tube vaut,

$$d' = \frac{1}{\gamma}\, d \simeq \frac{E_0 d}{T} = \frac{8.18 \cdot 10^{-14} \cdot 3 \cdot 10^3}{7.53 \cdot 10^{-9}}\,\mathrm{m} = 3.26\,\mathrm{cm} \; . \tag{24}$$