ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 27

2014-2015

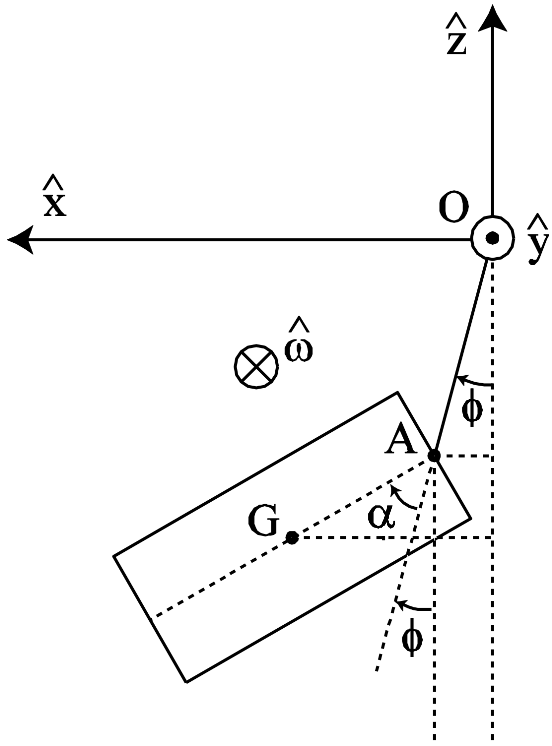
Exercice 1, Oscillations d'une charge suspendue

a) Le système possède 2 degrés de liberté pouvant être représentés par les coordonnées généralisées α et ϕ.

b) L'énergie cinétique d'un solide indéformable est donnée dans ce cas par

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_G \boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

où l'indice G désigne les grandeurs absolues relativement au centre d'inertie du solide. Le premier terme de l'énergie cinétique, généralement appelé énergie cinétique de translation, s'applique à n'importe quel type de mouvement du centre d'inertie G, même ici où G effectue une rotation.



Pour décrire le mouvement de ce solide, nous considérons deux référentiels, le référentiel absolu $Oxyz$ avec coordonnées cartésiennes selon la figure ci-contre et un référentiel relatif placé sur le solide au point d'attache A. Pour trouver l'énergie cinétique, il nous est indispensable de connaître $\mathbf{v}_G$ et $\boldsymbol{\omega}$, on suppose connu I_G (il est facile d'en trouver la valeur dans une référence).

Pour déterminer la vitesse de rotation instantanée du solide, considérons-nous comme un observateur placé en A, solidaire de la charge suspendue. Considérons un mouvement de la charge pour un angle α constant. Nous percevrons alors ce mouvement comme une rotation de vitesse $-\dot{\phi}\mathbf{e}_y$. Considérons maintenant un mouvement de la charge pour un angle ϕ constant. Nous percevrons alors ce mouvement comme une rotation de vitesse $-\dot{\theta}\mathbf{e}_y$. Un mouvement quelconque de la charge sera donc une composition de ces deux mouvements et sera donnée par

$$\boldsymbol{\omega} = -(\dot{\alpha} + \dot{\phi})\mathbf{e}_y \tag{2}$$

La vitesse du point G est quant à elle donnée par

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG} \tag{3}$$

avec

$$\mathbf{v}_A = \frac{d}{dt}(\mathbf{OA}) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} L\sin\phi \\ 0 \\ -L\cos\phi \end{pmatrix} = L\dot{\phi}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

et

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\dot{\alpha}+\dot{\phi}) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d\sin(\alpha+\phi) \\ 0 \\ -d\cos(\alpha+\phi) \end{pmatrix} = (\dot{\alpha}+\dot{\phi})d\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ 0 \\ \sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ce qui donne

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} L\dot{\phi}\cos\phi + (\dot{\alpha}+\dot{\phi})d\cos(\alpha+\phi) \\ 0 \\ L\dot{\phi}\sin\phi + (\dot{\alpha}+\dot{\phi})d\sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \tag{6}$$

L'énergie cinétique s'écrit donc

$$\begin{aligned}
T =&\frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_G\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{1}{2}m(v_{G,x}^2 + v_{G,y}^2 + v_{G,z}^2) + \frac{1}{2}I_G(\dot\alpha + \dot\phi)^2 \\
=&\frac{1}{2}m\left(L^2\dot\phi^2\cos^2\phi + 2Ld\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\cos\phi\cos(\alpha+\phi) + (\dot\alpha+\dot\phi)^2 d^2\cos^2(\alpha+\phi)\right) \\
&+ \frac{1}{2}m\left(L^2\dot\phi^2\sin^2\phi + 2Ld\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\sin\phi\sin(\alpha+\phi) + (\dot\alpha+\dot\phi)^2 d^2\sin^2(\alpha+\phi)\right) \\
&+ \frac{1}{2}I_G(\dot\alpha+\dot\phi)^2 \\
=&\frac{1}{2}m\left(L^2\dot\phi^2 + d^2(\dot\alpha+\dot\phi)^2 + 2Ld\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}I_G(\dot\alpha+\dot\phi)^2
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\
&\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\
&\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]
\end{aligned}$$

c) Connaissant déjà le terme T, il reste à déterminer l'énergie potentielle :

$$V = -mg\left(L\cos\phi + d\cos(\alpha+\phi)\right) \tag{7}$$

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\begin{aligned}
L = T - V = \frac{1}{2}m\left(L^2\dot\phi^2 + d^2(\dot\alpha+\dot\phi)^2 + 2Ld\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}I_G(\dot\alpha+\dot\phi)^2 \\
+ mg\left(L\cos\phi + d\cos(\alpha+\phi)\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

En appliquant l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ pour les coordonnées généralisées $\mathbf{q} = (\alpha, \phi)$, nous obtenons les équations du mouvement.

Pour la coordonnée α :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(2d^2(\dot\alpha+\dot\phi) + 2Ld\dot\phi\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}I_G 2(\dot\alpha+\dot\phi)\right] + mLd\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\sin\alpha + mgd\sin(\alpha+\phi) = 0$$

$$\left(I_G + md^2\right)(\ddot\alpha+\ddot\phi) + mLd\ddot\phi\cos\alpha - mLd\dot\phi\dot\alpha\sin\alpha + mLd\dot\phi(\dot\alpha+\dot\phi)\sin\alpha + mgd\sin(\alpha+\phi) = 0$$

et finalement l'équation du mouvement pour la coordonnée α est

$$\left(I_G + md^2\right)(\ddot\alpha+\ddot\phi) + mLd\ddot\phi\cos\alpha + mLd\dot\phi^2\sin\alpha + mgd\sin(\alpha+\phi) = 0 \tag{9}$$

Pour la coordonnée ϕ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(2L^2\dot\phi + 2d^2(\dot\alpha+\dot\phi) + 2Ld(\dot\alpha+2\dot\phi)\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}I_G 2(\dot\alpha+\dot\phi)\right] \\
+ mgL\sin\phi + mgd\sin(\alpha+\phi) = 0
\end{aligned}$$

et finalement l'équation du mouvement pour la coordonnée ϕ est

$$\begin{aligned}
\left(I_G + md^2\right)(\ddot\alpha+\ddot\phi) + mL^2\ddot\phi + mLd(\ddot\alpha+2\ddot\phi)\cos\alpha - mLd\dot\alpha(\dot\alpha+2\dot\phi)\sin\alpha + mgL\sin\phi \\
+ mgd\sin(\alpha+\phi) = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Exercice 2, Molécule diatomique adsorbée

a) Le système possède 2 degrés de liberté. On définit les coordonnées généralisées x_1 et x_2, coordonnées des masses m_1 et m_2 sur l'axe Ox. Remarque, on pourrait tout aussi bien résoudre le problème en considérant les distances $O - m_1$ et $m_1 - m_2$ comme coordonnées généralisées.
Avec les coordonnées envisagées, l'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{11}$$

L'énergie potentielle s'exprime elle par

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1 - l_2)^2 \tag{12}$$

avec l_1 et l_2 les longueurs au repos des ressorts de constantes k_1 et k_2.
Le lagrangien du système est donc

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1 - l_2)^2 \tag{13}$$

b) Equation de Lagrange sur la coordonnée x_1 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x_1}) = m\ddot{x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) \tag{14}$$

Et donc on a l'équation du mouvement

$$m_1\ddot{x_1} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - k_1l_1 + k_2l_2 = 0 \tag{15}$$

Equation de Lagrange sur la coordonnée x_2 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x_2}) = m\ddot{x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1 - l_2) \tag{16}$$

Et donc on a l'équation du mouvement

$$m_2\ddot{x_2} + k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0 \tag{17}$$

c) Afin de trouver les solutions pour lesquelles les deux masses oscillent à la même fréquence, les modes propres, on doit résoudre le système composé des deux équations du mouvement. Or, puisque ces équations sont couplées, il est plus aisé de passer par une résolution matricielle. Les équations (15) et (17) se mettent alors sous la forme

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1l_1 - k_2l_2 \\ k_2l_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

La matrice inverse de $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 \\ 0 & m_2^{-1} \end{pmatrix}$.
En multipliant par cette matrice l'équation (18), on aboutit à un système différentiel du deuxième ordre de la forme $\ddot{\mathbf{x}} = \mathtt{K}\mathbf{x} + \mathtt{B}$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k_1 - k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{k_1l_1 - k_2l_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2l_2}{m_2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Les solutions *générales*, de même fréquence, d'un tel système d'équations différentielles sont sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{20}$$

où ω est la pulsation cherchée, identique pour les deux masses. Ainsi, la fréquence s'obtient en résolvant uniquement le système différentiel homogène $\ddot{\mathbf{x}} = \mathtt{K}\mathbf{x}$.
En injectant l'ansatz (20) dans l'équation (19), et en simplifiant par $e^{i\omega t}$, on obtient

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k_1 - k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

On remarque ainsi que le vecteur $\mathbf{a}$ est vecteur propre de la matrice $\mathtt{K}$ de valeur propre $-\omega^2$. La présence du carré implique donc que $\mathbf{a}$ est associé à deux pulsations $\pm\omega$.
Ce qui revient à écrire

$$0 = \left(\begin{pmatrix} \dfrac{-k_1 - k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} + \omega^2 \mathbb{1} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \equiv (\mathtt{M} + \omega^2 \mathbb{1})\mathbf{a} \tag{22}$$

Comme on cherche des solutions telles que $\mathbf{a}$ soit non nul (solution non triviale), les seules valeurs de ω possibles sont les valeurs telles que $\mathrm{Det}(\mathtt{M} + \omega^2\mathbb{1}) = 0$, *i.e.* les valeurs propres racines du polynôme caractéristique. En effet, si ce déterminant n'était pas nul, la matrice $(\mathtt{M} + \omega^2\mathbb{1})$ serait inversible et le système (22) donnerait trivialement $\mathbf{a} = 0$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\mathtt{M} + \omega^2\mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} \dfrac{-k_1 - k_2}{m_1} + \omega^2 & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} + \omega^2 \end{vmatrix} \\
&= \omega^4 + \omega^2 \left(\frac{-k_1 - k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_2(k_1 + k_2)}{m_1 m_2} - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} \\
&= \omega^4 + \omega^2 \left(\frac{-k_1 - k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0
\end{aligned}$$

Et les racines de cette dernière équation sont finalement :

$$\omega_\pm^2 = \frac{m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2 \pm \sqrt{\left(-(k_1 + k_2)m_2 - m_1 k_2\right)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \tag{23}$$

d) i) Si $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$, alors

$$\omega_\pm^2 = \frac{k}{m} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{24}$$

Ce qui donne 4 pulsations :

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,; \ -\omega_+ = -\sqrt{\frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,; \ \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,; \ -\omega_- = -\sqrt{\frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \tag{25}$$

La forme des modes propres (solutions générales (20)) est déterminée lorsque les vecteurs propres $\boldsymbol{a}_+$, $\boldsymbol{a}_-$ associés aux valeurs propres ci-dessus sont connus. Dans ce cas, le système (22) devient

$$0 = \begin{pmatrix} \dfrac{-2k}{m} + \omega^2 & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & \dfrac{-k}{m} + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

• Pour ω_+^2, on a en remplaçant dans l'équation précédente

$$\frac{k}{m} \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{27}$$

Comme k/m est non nul, on en déduit le système d'équations :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} a_1 + a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_2 = 0 \tag{28}$$

La solution de ces équations donne le vecteur propre $\boldsymbol{a}_+$ associé aux pulsations ω_+ et $-\omega_+$. Le système d'équations possédant une inconnue libre, on fixe $a_1 = 1$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{a}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

• Pour ω_-^2, on trouve de la même manière le vecteur propre

$$\boldsymbol{a}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{30}$$

pour les pulsations ω_- et $-\omega_-$.

On vérifie également que ces vecteurs propres sont bien orthogonaux entre eux. Connaissant à présent les vecteurs propres ainsi que les valeurs propres (et donc les pulsations), on peut écrire la solution générale pour les positions des deux masses donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_- t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \tag{31}$$

où les constantes sont déterminées par les conditions initiales sur les positions $\mathbf{x}_0$ et les vitesses $\dot{\mathbf{x}}_0$. En effet, à $t = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = (A+B) \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + (C+D) \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} \end{pmatrix} = (A-B)\omega_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + (C-D)\omega_- \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Ce qui représente bien 4 équations pour 4 inconnues.

Si on suppose que (ce point n'était pas demandé) $x_{2,0} = 2x_{1,0}$, *i.e.* $x_{1,0} = l_1 = l$ et $x_{2,0} = l_1 + l_2 = 2l$, et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, on obtient

$$A = B = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20} l = -C = -D \tag{34}$$

ii) Si $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 \ll k_2$, alors en opérant les bonnes simplifications de (23), on aboutit à

$$\omega_+^2 = \frac{2k_2}{m} \quad \text{et} \quad \omega_-^2 = \frac{k_1}{2m} \tag{35}$$

Ce qui donne 4 pulsations :

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2k_2}{m}} \quad ; \quad -\omega_+ = -\sqrt{\frac{2k_2}{m}} \quad ; \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k_1}{2m}} \quad ; \quad -\omega_- = -\sqrt{\frac{k_1}{2m}} \tag{36}$$

• Pour ω_+^2, appliqué à (22), cela donne le système suivant

$$\frac{k_2}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 + a_2 = 0 \tag{37}$$

Cette équation possède une inconnue libre. En fixant $a_1 = 1$, on trouve le vecteur propre $\mathbf{a}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre ω_+^2 et donc aux deux pulsations ω_+ et $-\omega_+$.

• Pour ω_-^2, le système (22) devient

$$\frac{k_2}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 - a_2 = 0 \tag{38}$$

Cette équation possède une inconnue libre. En fixant $a_1 = 1$, on trouve le vecteur propre $\mathbf{a}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre ω_-^2 et donc aux deux pulsations ω_- et $-\omega_-$.

On vérifie que les deux vecteurs propres trouvés sont bien orthogonaux entre eux et la solution générale s'écrit donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_- t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \tag{39}$$

Les constantes sont à nouveau déterminées par les conditions initiales sur les positions $\mathbf{x}_0$ et les vitesses $\dot{\mathbf{x}}_0$. A $t = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = (A + B) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (C + D) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} \end{pmatrix} = (A - B)\omega_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (C - D)\omega_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Si, comme précédemment, on suppose $x_{2,0} = 2x_{1,0} = 2l$ et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, on obtient

$$A = B = -\frac{l}{4} \quad \text{et} \quad C = D = \frac{3l}{4} \tag{42}$$

Maintenant, si on suppose que $x_{2,0} = x_{1,0} = l$ et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, c'est-à-dire que la deuxième masse est en quasi-coïncidence avec la première, on obtient

$$A = B = 0 \quad \text{et} \quad C = D \tag{43}$$

Alors à tout instant $x_1 = x_2$ et le mode propre est symétrique.

Finalement, si $x_{2,0} = x_{1,0} = l$, deuxième masse en quasi-coïncidence avec la première, et $\dot{x}_{1,0} = -\dot{x}_{2,0} \neq 0$, les masses sont lancées dans des directions opposées, on obtient

$$A = -B \quad \text{et} \quad C = D \tag{44}$$

Et l'on a affaire a une composition d'un mode propre anti-symétrique avec un mode propre symétrique.