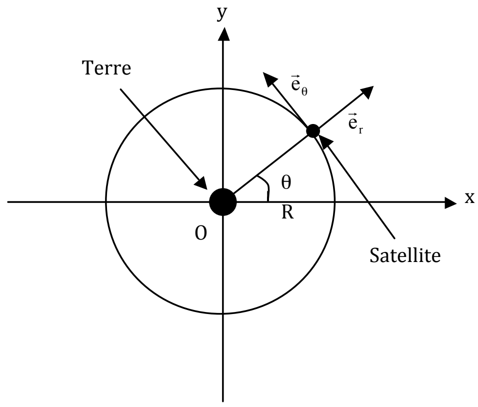
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 13
2014-2015

Exercice 1, Satellite

Système et repère : Le système est le satellite de masse m. Comme le satellite décrit une orbite plane autour de la terre, on choisit le repère polaire $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ d'origine O.

Contrainte : La trajectoire du satellite est une orbite circulaire de rayon R, i.e. $r = R = \text{cste} \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$.



Bilan des forces extérieures :

- Force de gravitation : $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{R^2}\,\mathbf{e}_r$.

a) *Equation du mouvement :* $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$. En tenant compte de la contrainte, l'accélération $\mathbf{a}$ est exprimée en coordonnées polaires commme,

$$\mathbf{a} = -\,R\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \ .$$

L'équation du mouvement s'écrit donc en composantes comme,

$$\text{selon } \mathbf{e}_r \ : \quad -\frac{GMm}{R^2} = -\,mR\dot{\theta}^2 \ , \tag{1}$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\theta \ : \quad 0 = mR\ddot{\theta} \ . \tag{2}$$

L'équation (2) implique qu'il n'y a pas d'accélération selon $\mathbf{e}_\theta$, i.e. $\ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \omega = \text{cste}$. Par conséquent, le satellite tourne à vitesse angulaire constante ω. Soit $\theta\,(0) = \theta_0$. Ainsi, la position angulaire est de la forme,

$$\theta\,(t) = \omega t + \theta_0 \ . \tag{3}$$

b) Etant donné que le satellite se déplace sur une orbite circulaire, la composante radiale de la vitesse est nulle. La vitesse du satellite $\mathbf{v}$ est alors donnée par,

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta = R\omega\,\mathbf{e}_\theta \ . \tag{4}$$

De plus, l'équation du mouvement (1) peut être mise sous la forme,

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \ , \tag{5}$$

ce qui implique que la norme v de la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_\theta$ est de la forme,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \ . \tag{6}$$

c) La période de rotation du satellite autour de la terre est lié à sa vitesse angulaire ω par,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ . \tag{7}$$

En comparant les équations (5) et (7), on obtient la 3^e loi de Kepler,

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{cste} \ . \tag{8}$$

d) Le satellite est sur une orbite circulaire de rayon $R = R_T + h$. La période de rotation vaut,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{MG}} \ . \tag{9}$$

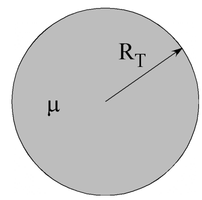
La vitesse vaut,

$$v = R\omega = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}} \ . \tag{10}$$

Application numérique : $T = 5301\,\text{s}$ et $v = 7799\,\text{ms}^{-1}$.

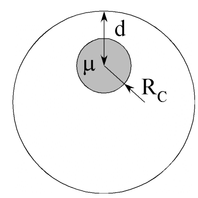
Exercice 2, Cavité sous terre

a) A la surface de la terre, le champ de gravitation créé g_0 par la terre “pleine” est de la forme,



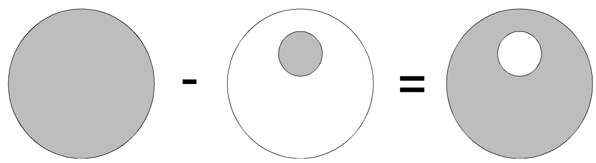
$$g_0 = \frac{G\mu V_T}{R_T^2} \ , \tag{11}$$

où μ est la masse volumique de la terre, R_T est le rayon terrestre et $V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3$ est le volume de la terre.
Le champ g_C que créerai à la surface de la terre une sphère de rayon R_C, de densité μ et de volume $V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3$ dont le centre se situe à une distance d sous la surface de la terre est donné par,



$$g_c = \frac{G\mu V_C}{d^2}. \tag{12}$$

Le principe d’additivité permet d’écrire que le champ g_1 ressenti juste au-dessus de la cavité, i.e.



$$g_1 = g_0 - g_c = G\mu\left(\frac{V_T}{R_T^2} - \frac{V_C}{d^2}\right) = \frac{4}{3}\pi G\mu\left(R_T - \frac{R_C^3}{d^2}\right) \ , \tag{13}$$

b) Soit $d = R$. Dans ce cas, l’expression de la précision relative δ est de la forme,

$$\delta = \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\mu R_T - \frac{4}{3}\pi G\mu\,(R_T - R_C)}{\frac{4}{3}\pi G\mu R_T} = \frac{R_C}{R_T} \ . \tag{14}$$

Application numérique : $\delta = 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad R_C = 6.38\,\text{m}$.

Exercice 3, La Terre sans dessus dessous

a) Il faut faire attention à distinguer deux cas différents :
— Le rayon r est plus petit que celui de la Terre. Dans ce cas, la masse qui contribue au champ de gravitation croît avec r.
— Le rayon r est plus grand que celui de la Terre. Dans ce cas, la masse qui contribue au champ de gravitation est constante et on retrouve la formule usuelle pour g, décroissant avec le carré de la distance r.

Rappel : dans le cas d'une sphère comme la Terre, le centre de masse coïncide avec le centre géométrique de la sphère, vers lequel le champ de gravitation $\boldsymbol{g}$ est dirigé. Ainsi, $\boldsymbol{g}$ est donné par :

$$\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{e}_r \ , \tag{15}$$

où G est la constante universelel de la gravitation, M est la masse de l'objet créant le champ de gravitation et r la distance au centre de masse.

Cas $r < R$:
Dans ce cas, la masse $M\,(r < R)$ qu'il faut considérer est la masse des couches intérieures, i.e. contenue dans la sphère de rayon $r < R$:

$$M\,(r < R) = \int\limits_{V(r)} \rho dV = \rho \int\limits_{V(r)} dV = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \ , \tag{16}$$

$$\boldsymbol{g}\,(r < R) = -\frac{4}{3}\pi G\rho r\boldsymbol{e}_r \ . \tag{17}$$

Il est intéressant de relever que dans ce cas, le champ de gravitation augmente linéairement avec r !

Cas $r > R$:
Dans ce cas, la masse M_{tot} qu'il faut considérer est la masse totale de la Terre :

$$M_{tot} = \int\limits_{V_{tot}} \rho dV = \rho \int\limits_{V_{tot}} dV = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \ , \tag{18}$$

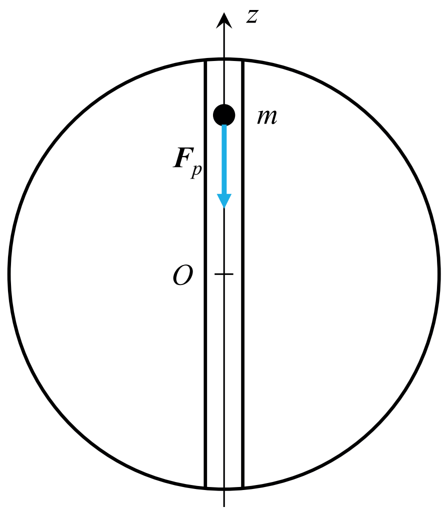
$$\boldsymbol{g}\,(r > R) = -\frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2}\boldsymbol{e}_r \ . \tag{19}$$

On retrouve la loi usuelle selon laquelle le champ de gravitation décroît avec le carré de la distance.

b) Pour un objet lâché de l'extrémité d'un tel tunnel, la seule force qui s'applique sur la masse m est la force de gravitation. On va devoir utiliser l'expression $\boldsymbol{g}\,(r < R)$ calculée précédemment. On place un axe Oz de telle manière qu'il soit confondu avec l'axe de révolution du tunnel cylindrique, avec l'origine placée au centre de la Terre.
Ainsi, la force de pesanteur $\boldsymbol{F}_p(z)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{F}_p(z) = m\boldsymbol{g}\,(z < R) = -\frac{4}{3}\pi mG\rho z\boldsymbol{e}_z \ . \tag{20}$$

On reconnaît ici une force du type ressort, i.e. proportionnelle à la distance au point d'équilibre (ici le centre de la Terre).
La seconde loi de Newton devient :



$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \ , \tag{21}$$

$$-\frac{4}{3}\pi m G\rho z \boldsymbol{e}_z = m\ddot{z}\boldsymbol{e}_z \ . \tag{22}$$

En projection sur l'axe Oz :

$$m\ddot{z} + \frac{4}{3}\pi m G\rho z = 0 \ . \tag{23}$$

On reconnaît ici l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est donnée par :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \ , \tag{24}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho \ . \tag{25}$$

L'objet est lâché de la surface de la Terre avec une vitesse initiale nulle. Les conditions initiales sont donc $z(t=0) = R$ et $\dot{z}(t=0) = 0$. On utilise 24 pour déterminer les constantes A et ϕ :

$$z(t=0) = A\cos\phi = R \ , \tag{26}$$

$$\dot{z}(t=0) = -\omega_0 A\sin\phi = 0 \ . \tag{27}$$

Ainsi, on obtient $\phi = 0$ et $A = R$. Donc, l'équation du mouvement s'écrit :

$$z(t) = R\cos(\omega_0 t) \ , \tag{28}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho \ . \tag{29}$$