ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 21
2014-2015

Exercice 1, Boule de billard sur table tournante

a) Le poids de la boule et la réaction du support se compensant, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{1}$$

où $\mathbf{F}$ caractérise le glissement de la boule.
Le théorème du moment cinétique induit l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_G = \mathbf{M}_G = (-a\mathbf{k}) \wedge \mathbf{F} \tag{2}$$

avec $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G\boldsymbol{\omega}$ et où $\mathbf{I}_G$ est un scalaire et $\mathbf{k}$ unitaire.
Soit $\mathbf{u}$ la vitesse du point de contact. On peut dès lors énoncer les trois équations vectorielles suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge (-a\mathbf{k}) \tag{3}$$

$$M\dot{\mathbf{V}}_G = \mathbf{F} \tag{4}$$

$$-a\mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = I_G\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{5}$$

L'opération $\mathbf{k}\wedge(5)$ fournit une expression pour $\mathbf{F}$. Pour rappel : $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

$$\mathbf{k} \wedge (-a\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) = -a\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) = I_G\mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\left[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{F})\,\mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{F}\right] \tag{6}$$

Ce qui aboutit à :

$$a\mathbf{F} = I_G\mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{7}$$

On injecte ensuite ce résultat pour $\mathbf{F}$ dans l'équation (4) de manière à obtenir une équation pour ω :

$$M\dot{\mathbf{V}}_G = \frac{I_G}{a}\mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{8}$$

En dérivant l'équation (3), on obtient une équation en $\dot{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{V}}_G = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (-a\mathbf{k}) = a\mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{9}$$

En considérant l'équation précédente et l'équation (8), on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{V}}_G = \frac{a^2M}{I_G}\dot{\mathbf{V}}_G \implies \dot{\mathbf{u}} = \left(1 + \frac{a^2M}{I_G}\right)\dot{\mathbf{V}}_G \tag{10}$$

Après intégration, on obtient :

$$\mathbf{V}_G = \gamma\mathbf{u} + \mathbf{C} \tag{11}$$

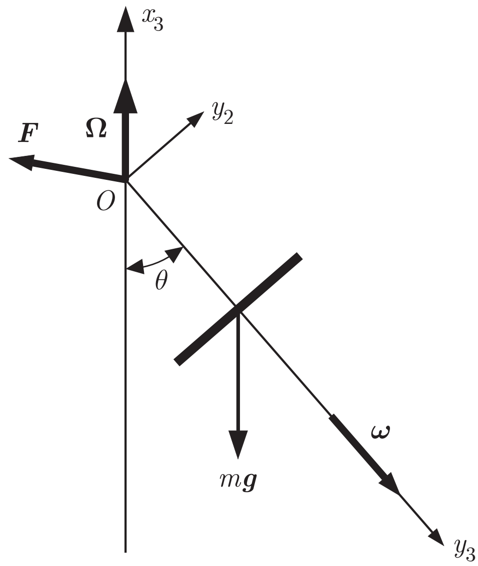
avec $\gamma = \left(1 + \frac{a^2M}{I_G}\right)^{-1}$ et où $\mathbf{C}$ est à déterminer par les conditions initiales.

b) Dans le cas où la surface horizontale est en rotation avec une vitesse Ω constante, on a $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_G$. Après dérivation, $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_G$. Par l'équation (10), on obtient :

$$\dot{\mathbf{V}}_G = \gamma\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_G \tag{12}$$

De cette équation on tire que le mouvement est circulaire.

Exercice 2, Roue en rotation uniforme



a) Il faut appliquer le théorème du moment cinétique au point O, qui est un point fixe du solide :

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext} \tag{13}$$

Soient $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire de précession, et $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation propre de la roue.

b) Le repère (O, y_1, y_2, y_3) défini sur la figure est un repère d'inertie. Les trois axes de ce repère sont les axes principaux de la roue. Nous pouvons donc écrire :

$$\boldsymbol{L}_O = \tilde{I}_O(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \tag{14}$$

où $\tilde{I}_O$ est le tenseur d'inertie de la roue au point O. Dans le repère (O, y_1, y_2, y_3), $\tilde{I}_O$ s'écrit :

$$\tilde{I}_O = \begin{pmatrix} I_{O\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O\parallel} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Les vecteurs vitesses angulaires de rotation s'écrivent :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ -\Omega\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \tag{16}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{L}_O = \begin{pmatrix} I_{O\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \omega - \Omega\cos\theta \end{pmatrix} = I_{O\perp}\Omega\sin\theta\hat{y}_2 + I_{O\parallel}(\omega - \Omega\cos\theta)\hat{y}_3 \tag{17}$$

On peut aussi calculer le moment cinétique au point G, et en déduire le moment cinétique au point O en utilisant la formule :

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{L}_G \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{L}_G = \tilde{I}_G(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \tag{18}$$

Comme $\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{G\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G\parallel} \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} I_{G\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \omega - \Omega\cos\theta \end{pmatrix} = I_{G\perp}\Omega\sin\theta\hat{y}_2 + I_{G\parallel}(\omega - \Omega\cos\theta)\hat{y}_3 \tag{19}$$

De plus, $\boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{v}_G = L\hat{y}_3 \wedge ML\sin\theta\Omega\hat{y}_1 = ML^2\Omega\sin\theta\hat{y}_2$.
On obtient en définitive :

$$\boldsymbol{L}_O = (I_{G\perp} + ML^2)\Omega\sin\theta\hat{y}_2 + I_{G\parallel}(\omega - \Omega\cos\theta)\hat{y}_3 \tag{20}$$

On vérifie ainsi qu'on passe des composantes du tenseur d'inertie par rapport à O ou G en appliquant la formule de Steiner :

$$\begin{cases} I_{O\perp} = I_{G\perp} + ML^2 \\ I_{O\parallel} = I_{G\parallel} \end{cases} \tag{21}$$

c) Puisque le repère $(O, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ est un repère d'inertie lié au solide tournant à la vitesse angulaire Ω autour de Ox_3 avec Ω constant, on a

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{M}_O^{ext} = \big(\Omega I_{\|} \sin\theta(\omega - \Omega\cos\theta) + \Omega^2 I_{O\perp} \cos\theta \sin\theta\big)\hat{y}_1$$

Ce résultat conclut la résolution du problème.

Cependant, on peut s'interroger sur son sens physique. En particulier, on pourrait s'attendre à voir apparaître un terme qui dépende du poids ! Le fait est que le moment $\boldsymbol{M}_O^{ext}$ est la résultante de deux termes. L'un est le moment dû au poids, $\boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{g}$. L'autre est un moment supplémentaire qu'il faut appliquer à l'axe pour satisfaire les conditions du mouvement. Il s'obtient donc en soustrayant $\boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{g}$ de $\boldsymbol{M}_O^{ext}$. Appelons ce dernier $\boldsymbol{M}_O^{app}$ pour « moment appliqué ». On a ainsi :

$$\boldsymbol{M}_O^{app} = -\boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{g} + \big(\Omega I_{\|} \sin\theta(\omega - \Omega\cos\theta) + \Omega^2 I_{O\perp} \cos\theta \sin\theta\big)\hat{y}_1 \tag{22}$$

On voit ainsi clairement apparaître la notion intuitive selon laquelle le moment appliqué agit pour contrebalancer le moment dû au poids, et agit aussi pour tenir compte des effets gyroscopiques. Pour rendre le sens physique de ce moment $\boldsymbol{M}_O^{app}$, on peut s'imaginer l'implémenter par un couple de forces. Soit par exemple une force $\boldsymbol{C}$ appliquée sur l'axe à un point P_α donné par $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{OP}_\alpha$ et une force $-\boldsymbol{C}$ appliquée à $-\boldsymbol{d}$. Alors $\boldsymbol{M}_O^{app} = 2\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{C}$. On note que le théorème du moment cinétique avec le point O comme référence permet de déterminer $\boldsymbol{M}_O^{app}$, donc la force $\boldsymbol{C}$, mais ne dit rien de la force de réaction $\boldsymbol{F}$. Inversement, le théorème du centre de masse permet de trouver la force de réaction $\boldsymbol{F}$, mais ne dit rien de $\boldsymbol{C}$, puisque la somme des deux forces $\boldsymbol{C}$ et $-\boldsymbol{C}$ qui implémentent $\boldsymbol{M}_O^{app}$ est nulle !

Finalement, on peut se demander ce qui se passe si on commence par appliquer $\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$. Dans cette approche, on calcule $\boldsymbol{L}_G = I_{G\perp}\Omega\sin\theta\hat{y}_2 + I_{G\|}(\omega - \Omega\cos\theta)\hat{y}_3$. Pour comparer les deux approches, on note que $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_G + ML^2\Omega\cos\theta\hat{y}_2$. En dérivant par rapport au temps cette expression, les deux formes du théorème du moment cinétique et les formules de Poisson impliquent : $\boldsymbol{M}_O^{ext} = \boldsymbol{M}_G^{ext} + ML^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta\hat{y}_1$. Mais d'autre part, en considérant le couple des forces $\boldsymbol{C}$ et le moment du poids, on peut écrire immédiatement :

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} = 2\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{C} + \boldsymbol{OG} \wedge M\boldsymbol{g} \tag{23}$$
$$\boldsymbol{M}_G^{ext} = (\boldsymbol{GO} - \boldsymbol{d}) \wedge (-\boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{GO} + \boldsymbol{d}) \wedge (\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{GO} \wedge \boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{C} + \boldsymbol{GO} \wedge \boldsymbol{F} \tag{24}$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} - \boldsymbol{M}_G^{ext} = \boldsymbol{OG} \wedge (M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}) \tag{25}$$

C'est le théorème du centre de masse qui nous dicte maintenant la valeur de la somme des forces. G décrit un mouvement circulaire uniforme d'accélération centripète horizontale. On peut écrire immédiatement :

$$ML\sin\theta\Omega^2(-\sin\theta\hat{y}_3 - \cos\theta\hat{y}_2) = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} \tag{26}$$

Le produit vectoriel confirme comme il se doit le résultat déjà obtenu pour la différence entre le moment par rapport à G et par rapport à O :

$$\boldsymbol{OG} \wedge (M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}) = ML^2\sin\theta\cos\theta\Omega^2\hat{y}_1 \tag{27}$$