ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 25
2014-2015

Exercice 1, Cylindre dans cylindre

a) Le système étudié est formé des deux cylindres et possède un seul degré de liberté. En effet, puisque le petit cylindre roule sans glisser à l'intérieur du grand cylindre, les angles α et θ sont liés par la condition de roulement sans glissement (vitesse du point de contact $\mathbf{v}_P$ nulle). Cette condition s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{GP} = 0 \tag{1}$$

où $\mathbf{\Omega} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha})\mathbf{e}_z$ est le vecteur vitesse de rotation totale du petit cylindre.
La vitesse du point G est donnée en coordonnées cylindriques par

$$\mathbf{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{2}$$

ainsi que

$$\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{GP} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha})r\mathbf{e}_\theta \tag{3}$$

La condition de roulement sans glissement projetée sur $\mathbf{e}_\theta$ donne donc

$$R\dot{\theta} + r\dot{\alpha} = 0 \tag{4}$$

L'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega} \cdot I\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \tag{5}$$

L'énergie potentielle s'exprime quant à elle par :

$$V = -mg(R - r)\cos\theta \tag{6}$$

On en déduit directement le lagrangien du système en fonction de θ uniquement à l'aide de l'équation (4) :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 + mg(R-r)\cos\theta \tag{7}$$

Les équations du mouvement sont obtenues par les équations de Lagrange. En l'occurrence une seule équation pour la coordonnée θ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{8}$$

Ce qui donne,

$$\left[m(R-r)^2 + I\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta = 0 \tag{9}$$

b) Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, on peut poser $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation du mouvement peut se réécrire comme

$$\left[m(R-r)^2 + I\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0 \tag{10}$$

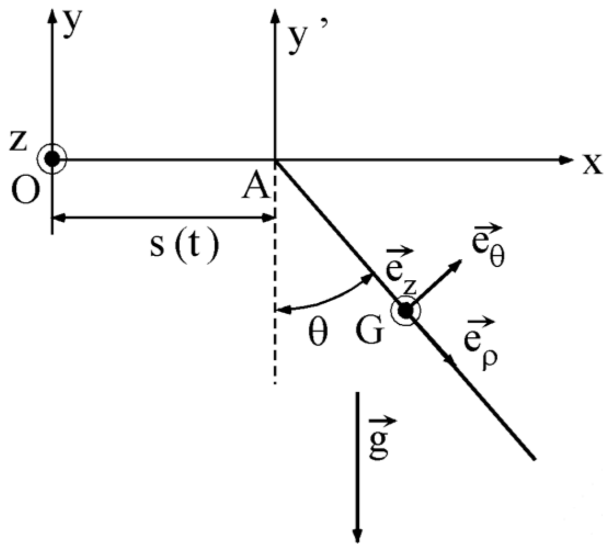
Cette équation s'apparente alors à l'équation différentielle homogène du second ordre de l'oscillateur harmonique, $m\ddot{x} + kx = 0$, dont on sait que la pulsation est égale à $\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m}$. Par analogie, on en déduit la fréquence d'oscillation qui s'exprime par :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-r)}{m(R-r)^2 + I\left(1-\frac{R}{r}\right)^2}} \tag{11}$$

Finalement, sachant que le moment d'inertie pour un cylindre homogène est donné par $I = \frac{1}{2}mr^2$, on a

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}} \tag{12}$$

Exercice 2, Barre tractée



Le système est caractérisé par le référentiel absolu $Oxyz$ et le référentiel relatif lié au point d'attache de la barre $Axy'z$. On travaillera avec le repère cylindrique $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ dans le référentiel mobile. Les coordonnées du centre de masse G sont données par

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA} + \mathbf{AG} = s(t)\mathbf{e}_x + \mathbf{AG} \tag{13}$$

où $\mathbf{AG}$ est décrit par les coordonnées $\rho = L$, $z = cste$ et θ libre. θ est donc la coordonnée associée au seul degré de liberté du système.

a) L'énergie potentielle est égale à

$$V = -mgL\cos\theta \tag{14}$$

Et l'énergie cinétique s'exprime par

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot I_G\boldsymbol{\omega}) \tag{15}$$

avec I_G le moment d'inertie de la barre et $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$.
On obtient $\mathbf{v}_G$ en passant par l'expression du mouvement relatif, *i.e.*

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_a(G) = \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(G) \tag{16}$$

avec $\mathbf{v}_a(A) = \dot{s}(t)\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_r(G) = L\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ obtenue avec l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques. Finalement, en utilisant le fait que $\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$, on en tire que

$$\mathbf{v}_G = (\dot{s} + L\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_x + L\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_y \tag{17}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta}\cos\theta \tag{18}$$

L'énergie cinétique est donc finalement donnée par

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \tag{19}$$

Le lagrangien est alors

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(mL^2 + I_G)\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta}\cos\theta + mgL\cos\theta \tag{20}$$

L'équation du mouvement découle de l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= (mL^2 + I_G)\dot{\theta} + m\dot{s}L\cos\theta \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) &= (mL^2 + I_G)\ddot{\theta} - m\dot{s}L\dot{\theta}\sin\theta + m\ddot{s}L\cos\theta \\
\frac{\partial L}{\partial\theta} &= -m\dot{s}L\dot{\theta}\sin\theta - mgL\sin\theta
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation (21) se réécrit comme

$$(mL^2 + I_G)\ddot{\theta} + m\ddot{s}L\cos\theta + mgL\sin\theta = 0 \tag{22}$$

qui est l'équation du mouvement pour la coordonnée θ.