ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 3

2014-2015

Exercice 1, Boules de neige

Démarche : On établit d'abord les équations du mouvement d'une boule de neige, puis on détermine les angles vérifiant les conditions initiales et finales de la trajectoire et les temps de vols.

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel la terre et comme repère le système de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical Oxy centré sur la position de tir. Le système est la boule de neige.

Bilan des forces : Poids : $m\,\mathbf{g} = -\,mg\,\mathbf{e}_y$.

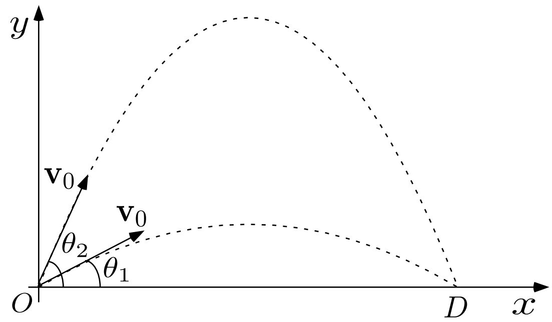
Loi du mouvement : Poids : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = m\,\mathbf{a}$.

Conditions initiales (à $t = 0$) :

- $x\,(0) = 0$ et $y\,(0) = 0$.
- $\dot{x}\,(0) = v_0 \cos\theta$ et $\dot{y}\,(0) = v_0 \sin\theta$.

Conditions d'impact (à $t = t_i$) :

- $x\,(t_i) = D$ et $y\,(t_i) = 0$.



Equations du mouvement : On projète la loi du mouvement $m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}$ selon les axes horizontal $\mathbf{e}_x$ et vertical $\mathbf{e}_y$, et on intègre en tenant compte des conditions initiales, i.e.

- $\mathbf{e}_x :\quad \ddot{x}\,(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}\,(t) = v_0 \cos\theta \quad\Rightarrow\quad x\,(t) = v_0 \cos\theta t\ ,\qquad (1)$
- $\mathbf{e}_y :\quad \ddot{y}\,(t) = -\,g \quad\Rightarrow\quad \dot{y}\,(t) = -\,gt + v_0 \sin\theta \quad\Rightarrow\quad y\,(t) = -\,\frac{1}{2}\,gt^2 + v_0 \sin\theta t\ .\qquad (2)$

a) Les équations du mouvement (1) et (2) au point d'impact $(D, 0)$ et au temps d'impact $t = t_i$ donnent,

$$D = v_0 \cos\theta t_i\ , \tag{3}$$

$$0 = -\,\frac{1}{2}\,gt_i^2 + v_0 \sin\theta t_i\ . \tag{4}$$

En substituant l'équation (3) dans la seconde équation (4), celle-ci se réduit à

$$\frac{gD}{v_0^2} = 2 \sin\theta \cos\theta\ . \tag{5}$$

De la relation trigonométrique $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, on tire que

$$\frac{gD}{v_0^2} = \sin(2\theta)\ . \tag{6}$$

La relation d'équivalence trigonométrique $\sin(2\theta) = \sin(\pi - 2\theta)$, implique que l'équation (6) a deux solutions, i.e.

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{gD}{v_0^2}\right)\ , \\[2ex] \theta_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{gD}{v_0^2}\right)\ . \end{cases} \tag{7}$$

Application numérique : $\theta_1 = 18.9°$ et $\theta_2 = 71.1°$ avec $g = 9.81\,m/s^2$.

b) Le temps de vol $t_{1,2}$ des boules 1 et 2 est déduit de l'équation (3), i.e.

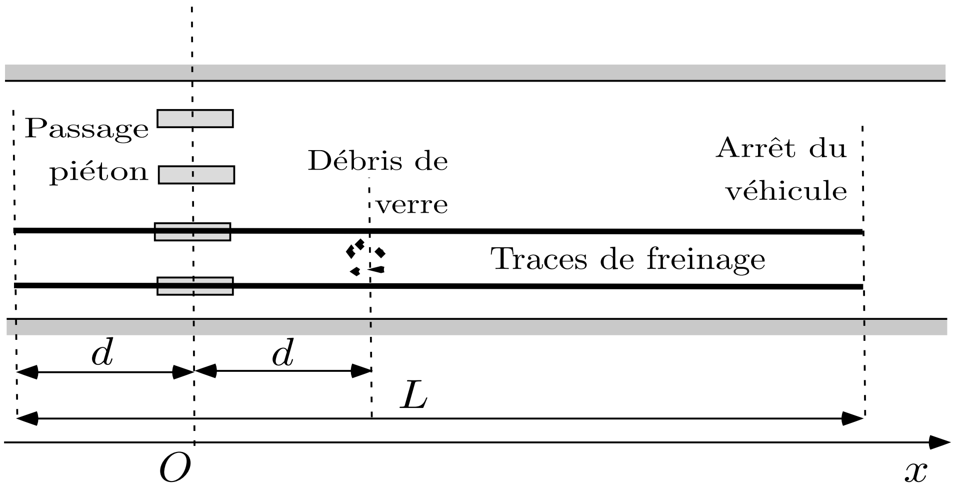
$$t_{1,2} = \frac{D}{v_0 \cos\theta_{1,2}} \ . \tag{8}$$

La différence de temps de vol Δt est donnée par

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{D}{v_0}\left(\frac{1}{\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1}\right) \ . \tag{9}$$

Application numérique : $t_1 = 1.32\,s$, $t_2 = 3.86\,s$ et $\Delta t = 2.54\,s$.

Exercice 2, L'accident



Note : L'orgine O de l'axe x est centrée sur le passage piéton. La norme de la vitesse initiale de la voiture est v_0.

a) ***Analyse des traces de freinage :***

Conditions initiales ($t = 0$) *:* $x(0) = -d$ et $v(0) = v_0$.

Conditions finales ($t = t_f$) *:* $x(t_f) = L - d$ et $v(t_f) = 0$.

Le temps initial $t = 0$ correspond au moment où la voiture commence à freiner et le temps final $t = t_f$ au moment où la voiture s'immobilise.

Equation du mouvement : On intègre la loi du mouvement selon l'axe x en tenant compte des conditions initiales, i.e.

$$\ddot{x}(t) = -a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -\,at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\,\frac{1}{2}\,at^2 + v_0 t - d \ . \tag{10}$$

L'équation du mouvement (10) peut être évaluée lorsque la voiture s'immobilise au temps $t = t_f$ en tenant compte des conditions finales, i.e.

$$0 = -\,at_f + v_0 \ , \tag{11}$$

$$L - d = -\,\frac{1}{2}\,at_f^2 + v_0 t_f - d \ . \tag{12}$$

En substituant l'équation (11) dans l'équation (12), on détermine la vitesse initiale v_0, i.e.

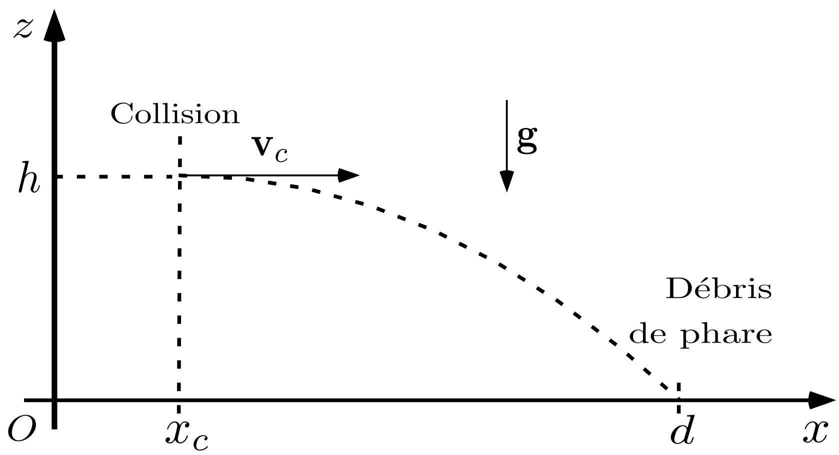
$$v_0 = \sqrt{2La} \; . \tag{13}$$

Finalement, en substituant l'expression (13) pour la vitesse initiale dans l'équation (11), on trouve le temps de freinage t_f, i.e.

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{a}} \; . \tag{14}$$

Application numérique : $v_0 = 25\,m/s = 90\,km/h$ et $t_f = 4.8\,s$.
Par conséquent, la voiture roulait trop vite !

b) ***Analyse de la position des débris de phare :***



Conditions initiales de collision ($t = t_c$) *:* (déduites de l'équation du mouvement (10))

$$\begin{aligned} &x\,(t_c) \equiv x_c = -\,\frac{1}{2}\,at_c^2 + v_0 t_c - d \quad \text{et} \quad v_x\,(t_c) = v_c = -\,at_c + v_0 \; , \\ &z\,(t_c) \equiv z_c = h \quad \text{et} \quad v_z\,(t_c) = 0 \; . \end{aligned} \tag{15}$$

Conditions finales de collision ($t = t_c + \Delta t$) *:* (Δt est le temps de vol des débris)

$$x\,(t_c + \Delta t) = d \quad \text{et} \quad z\,(t_c + \Delta t) = 0 \; . \tag{16}$$

Equations du mouvement :

L'équation du mouvement selon l'axe horizontal x est un mouvement rectiligne uniforme. L'équation selon l'axe vertical z est une chute libre, i.e. un mouvement uniformément accéléré avec une accélération de norme g dirigée vers le bas. On projète la loi du mouvement selon les axes horizontal x et vertical z, et on intègre par rapport à $t' = t - t_c$ en tenant compte des conditions initiales de collision (15), i.e.

$$\ddot{x}\,(t') = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}\,(t') = v_c \quad \Rightarrow \quad x\,(t') = v_c t' + x_c \; , \tag{17}$$

$$\ddot{z}\,(t') = -\,g \quad \Rightarrow \quad \dot{z}\,(t') = -\,gt' \quad \Rightarrow \quad z\,(t') = -\,\frac{1}{2}\,gt'^2 + h \; . \tag{18}$$

Ces équations du mouvement ne sont valables qu'après la collision, i.e. lorsque $t' \geq 0$. Les équations du mouvement (17) et (18) peuvent alors être évaluées lorsque les débris de phare touchent le sol au temps $t = t_c + \Delta t \;\Rightarrow\; t' = \Delta t$ en tenant compte des conditions finales (16), i.e.

$$d = v_c \Delta t + x_c \ , \tag{19}$$

$$0 = -\frac{1}{2}\, g\, (\Delta t)^2 + h \ . \tag{20}$$

En utilisant les conditions initiales de collision (15), l'équation (19) devient une équation du second degré en t_c, i.e.

$$t_c^2 - 2\left(\frac{v_0}{a} - \Delta t\right) t_c + \frac{2}{a}\Big(2d - v_0 \Delta t\Big) = 0 \ . \tag{21}$$

En substituant l'équation (20) dans l'équation (21), celle-ci devient,

$$t_c^2 - 2\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) t_c + \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 0 \ . \tag{22}$$

Les solutions analytiques de cette équation du dexième degré sont,

$$t_c = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)} \ , \tag{23}$$

où la solution avec le signe positif correspond à un temps plus grand que le temps de freinage t_f $(7.8\, s)$. Cette solution acausale n'a aucune signification physique et doit être rejetée. Ainsi la solution physique est,

$$t_c = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)} \ , \tag{24}$$

De plus, en utilisant l'équation (15), l'équation (19) peut être mise sous la forme,

$$x_c = d - a\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{25}$$

Application numérique : $t_c = 0.93\, s$ et $x_c = 6\, m$.

Par conséquent, le piéton traversait en dehors du passage piéton !