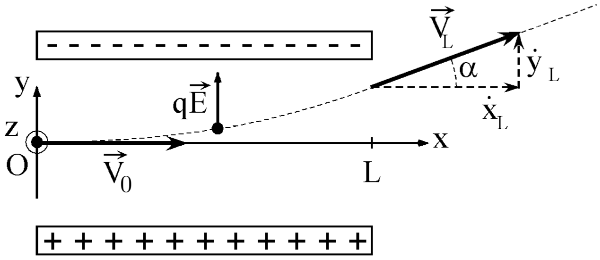
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 14
2014-2015

Exercice 1, Tube cathodique

a) *Système et repère :* Le système est la particule de mase m et de charge électrique q. On choisit comme référentiel le condensateur et comme repère le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ d'origine O centrée à l'entrée du condensateur.



Conditions initiales :

- Position initiale : $\mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{x}_0 = (0,0)$,
- Vitesse initiale : $\mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}_0 = (v_0, 0)$.

Bilan des forces extérieures :

- Force électrostatique : $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = qE\,\mathbf{e}_y$.

Equation du mouvement : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{F}_e = m\,\mathbf{a}$. La projection de cette équation vectorielle sur les axes du repère cartésien donne,

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : \quad 0 = m\ddot{x}\ , \tag{1}$$
$$\text{selon } \mathbf{e}_y : \quad qE = m\ddot{y}\ . \tag{2}$$

b) En intégrant les équations du mouvement (1) et (2) par rapport au temps tout en tenant compte des conditions initiales, on trouve l'expression de la vitesse, i.e.

$$\dot{x}(t) = v_0\ , \tag{3}$$
$$\dot{y}(t) = \frac{qE}{m}\,t\ . \tag{4}$$

En intégrant les équations (3) et (4) par rapport au temps tout en tenant compte des conditions initiales, on trouve l'équation horaire, i.e.

$$x(t) = v_0\,t\ , \tag{5}$$
$$y(t) = \frac{qE}{2m}\,t^2\ . \tag{6}$$

La sortie du condensateur est déterminée par la condition $x = L$. L'équation horaire (5) implique que cette sortie a lieu au temps $t_L = \frac{L}{v_0}$. Au temps t_L, les composantes de la vitesse sont données par,

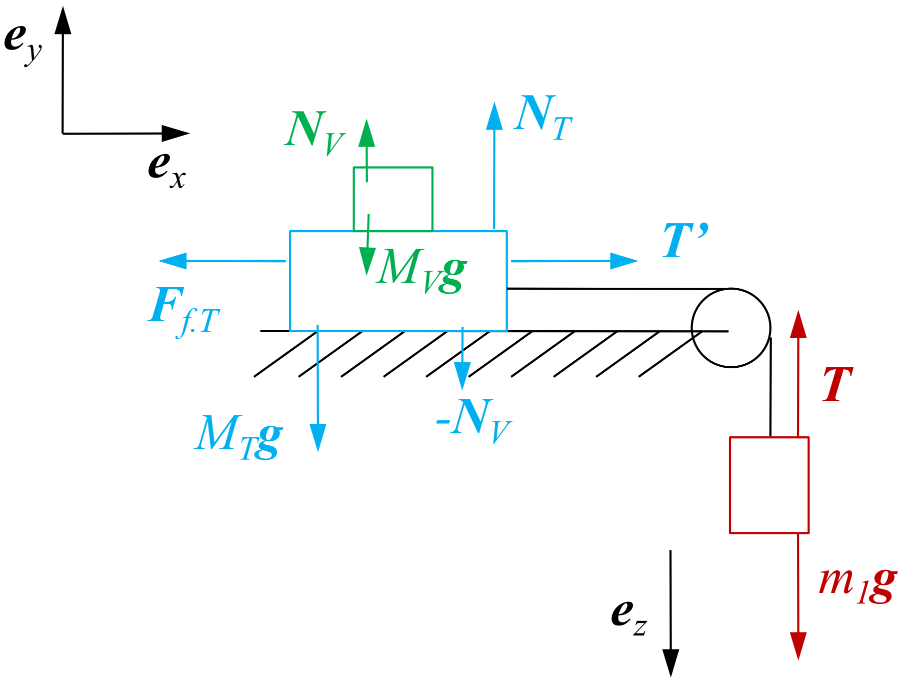
$$\dot{x}(t_L) = v_0\ , \tag{7}$$
$$\dot{y}(t_L) = \frac{qEL}{mv_0}\ . \tag{8}$$

L'angle α de la trajectoire de la particule par rapport à l'horizontale correspond à l'orientation du vecteur vitesse. Par conséquent,

$$\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t_L)}{\dot{x}(t_L)} = \frac{qEL}{mv_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{qEL}{mv_0^2}\right)\ . \tag{9}$$

Exercice 2, L'évasion des Dalton

a) Joe n'a pas d'accélération, la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle (en rouge) :



$\sum \boldsymbol{F} = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} = 0$. En projection sur l'axe $\boldsymbol{e}_z$, on obtient :

$$m_1 g - T = 0$$
$$T = m_1 g$$

Considérons maintenant la table. La somme des forces s'exerçant sur celle-ci doit elle aussi être nulle (en bleu) : $\sum \boldsymbol{F} = m_T\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T'} + \boldsymbol{N_T} + \boldsymbol{F_{fT}} - \boldsymbol{N_V} = 0$. En projection :

$$T' - F_{fT} = 0 \text{ selon x}$$
$$-M_T g + N_T - N_V = 0 \text{ selon y}$$

Le vase est lui aussi à l'équilibre (en vert) : $\sum \boldsymbol{F} = m_V\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_V} = 0$ et donc $-M_V g + N_V = 0$ selon y. Et comme $T = T'$ on obtient, en remplaçant T et N_V par leurs valeurs respectives :

$$m_1 g - F_{fT} = 0 \text{ selon x}$$
$$-M_T g + N_T - M_V g = 0 \text{ selon y}$$

Donc :

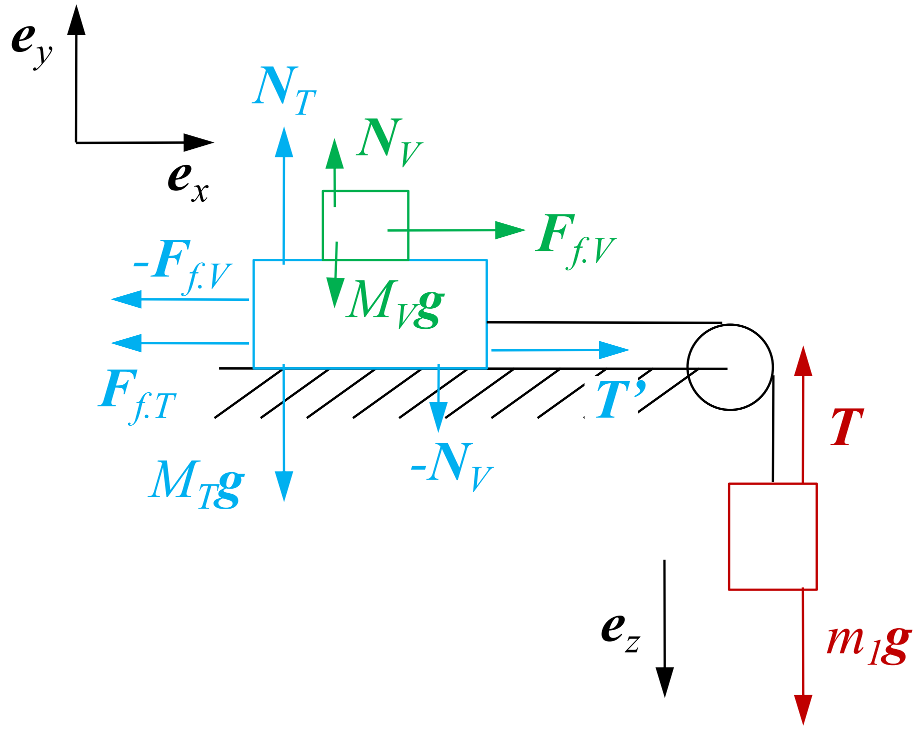
$$N_T = (M_T + M_V)g$$
$$F_{fT} = m_1 g$$

Or la force de frottement statique est bornée par : $F_{fT} \leq \alpha_s N_T$. On obtient ainsi la condition :

$$m_1 g \leq \alpha_s (M_T + M_V) g \implies M_V \geq \frac{m_1}{\alpha_s} - M_T$$

b) On considère dans un premier temps les forces s'exerçant sur le vase (en vert) :

$$M_V \boldsymbol{a_V} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{fV}} + M_V\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_V}$$



Selon x : $M_V a_V = F_{fV} \leq \beta_s N_V$
Selon y : $0 = -M_V g + N_V \Rightarrow N_V = M_V g$
$\Longrightarrow a_V \leq \beta_s g$
Puis sur la table (en bleu) :

$$M_T \boldsymbol{a_T} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{fT}} - \boldsymbol{F_{fV}} + M_T \boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_T} - \boldsymbol{N_V} + \boldsymbol{T'}$$

Selon x : $M_T a_T = -F_{fT} - F_{fV} + T' = -\alpha_c N_T - M_V a_V + T'$
Selon y : $0 = -M_T g + N_T - N_V \Rightarrow N_T = g(M_V + M_T)$
$\Longrightarrow M_T a_T = T' - M_V a_V - \alpha_c g(M_V + M_T)$
Et finalement sur Averell (en rouge) :

$$m_2 \boldsymbol{a_2} = \sum \boldsymbol{F} = m_2 \boldsymbol{g} + \vec{T}$$

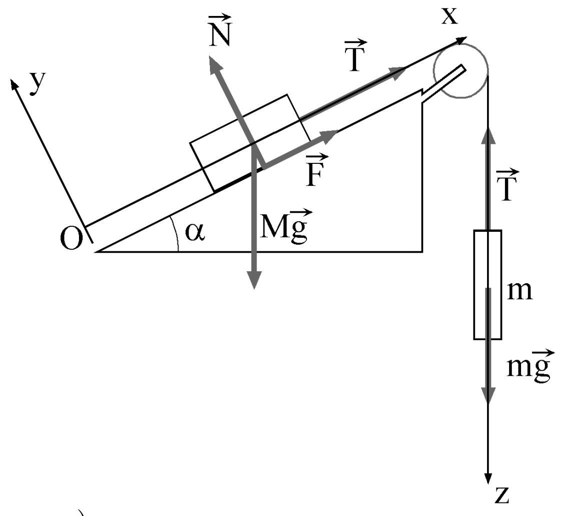
Selon z : $m_2 a_2 = m_2 g - T \Longrightarrow T = m_2(g - a_2)$
Or, on veut que le vase ne glisse pas sur la table, ce qui implique que $a_V = a_T = a$. De plus, l'accélération d'Averell est la même que celle de la table : $a_2 = a$. Nous avons par ailleurs $T = T'$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} a(M_T + M_V) &= m_2(g - a) - \alpha_c g(M_T + M_V) \\ a &= g\frac{m_2 - \alpha_c(M_T + M_V)}{M_V + M_T + m_2} \end{aligned}$$

Or nous avions la condition $\alpha_V \leq \beta_s g$. Avec $a_V = a$ il advient que :

$$\begin{aligned} \frac{m_2 - \alpha_c(M_T + M_V)}{M_V + M_T + m_2} &\leq \beta_s \\ m_2(1 - \beta_s) &\leq \beta_s(M_V + M_T) + \alpha_c(M_V + M_T) \\ m_2 &\leq \frac{(\beta_s + \alpha_c)(M_V + M_T)}{(1 - \beta_s)}. \end{aligned}$$

Exercice 3, Plot sur plan incliné



a) Vaincre le frottement statique revient à trouver la force limite $\mathbf{F}_{max} = \mu_s \mathbf{N}$. On résout donc le problème statique.

Système et repère : Le système est la masse M. On choisit le repère cartésien défini par Oxy, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ d'origine O.

Contrainte : Le plot est astreint à se déplacer sur le plan incliné : $y =$ cst $\Rightarrow$ $\dot{y} = 0$ et $\ddot{y} = 0$

Bilan des forces extérieures :

- Pesanteur : $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = mg\,(-\sin\alpha\,\mathbf{e}_x - \cos\alpha\,\mathbf{e}_y)$,
- Réaction du plan incliné (contrainte) : $\mathbf{N} = N\,\mathbf{e}_y$.
- Force de frottement statique : $\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}_x = \mu_s N\,\mathbf{e}_x$ qui s'oppose à tout mouvement, le signe de F est inconnu et sera donné par la résolution, on l'écrit positif à priori.
- Traction du fil : $\mathbf{T} = T\,\mathbf{e}_x$ La norme T est celle exercée par la masse m sur le fil (le fil "transmet" intégralement cette force). On la détermine par la résolution du problème statique du système formé par la masse m ; la projection sur l'axe z des forces de pesanteur et de traction donne $T = mg$ Ainsi, pour la masse M, $\mathbf{T} = mg\,\mathbf{e}_x$

Equation du mouvement : $m\mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}}$, avec projection sur les axes :

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : \quad -Mg\sin\alpha + mg + F = 0 \tag{10}$$
$$\text{selon } \mathbf{e}_y : \quad -Mg\cos\alpha + N = 0 \tag{11}$$

L'équation (11) donne : $N = Mg\cos\alpha$. On a donc $F = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\alpha$.

On injecte cette dernière relation dans (10), en distinguant deux cas possibles :

1. Masse m maximum (on rajoute du lest) : la valeur de F est négative car elle s'oppose à une force de traction vers les x positifs. Ainsi, (10) devient :
$$-Mg\sin\alpha + m_{max}g - \mu_s Mg\cos\alpha = 0 \tag{12}$$
On en déduit :
$$m_{max} = M(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha) \tag{13}$$
2. Masse m minimum (on allège le lest) : la valeur de F est positive, car elle s'oppose au glissement de la masse M vers les x négatifs. On réécrit alors (10) comme :
$$-Mg\sin\alpha + m_{max}g + \mu_s Mg\cos\alpha = 0 \tag{14}$$
On en déduit :
$$m_{min} = M(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha) \tag{15}$$
Dans ce cas, on peut avoir $m_{min} = 0$ si $\sin\alpha \leq \mu_s\cos\alpha$ (plan faiblement incliné).

b) On passe au cas dynamique. La résolution est identique à celle proposée ci-dessus, jusqu'à l'estimation de la force de frottement :

- Force de frottement dynamique : $\mathbf{F} = -\mu_d N \dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\,\mathbf{e}_x$ qui s'oppose au mouvement.
- Traction du fil : $\mathbf{T} = T\,\mathbf{e}_x$.
  T est déterminée par l'équation du mouvement de la masse m. Sur l'axe z, la seconde loi de Newton donne $m\ddot{z} = mg - T$. Comme les masses sont liées par un câble rigide (inextensible), alors leurs mouvements sont couplés et $\ddot{z} = \ddot{x}$. Ainsi, $T = m(g - \ddot{x})$ et donc $\mathbf{T} = m(g - \ddot{x})\,\mathbf{e}_x$.

Equation du mouvement : $m\mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}}$, avec projection sur les axes :

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : \quad -Mg\sin\alpha + m(g - \ddot{x}) - \mu_d N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = M\ddot{x} \tag{16}$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_y : \quad -Mg\cos\alpha + N = 0 \tag{17}$$

L'équation (17) donne : $N = Mg\cos\alpha$. Injecté dans (16), on écrit alors l'équation du mouvement :

$$(M+m)\ddot{x} = mg - Mg\left(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\right) \tag{18}$$