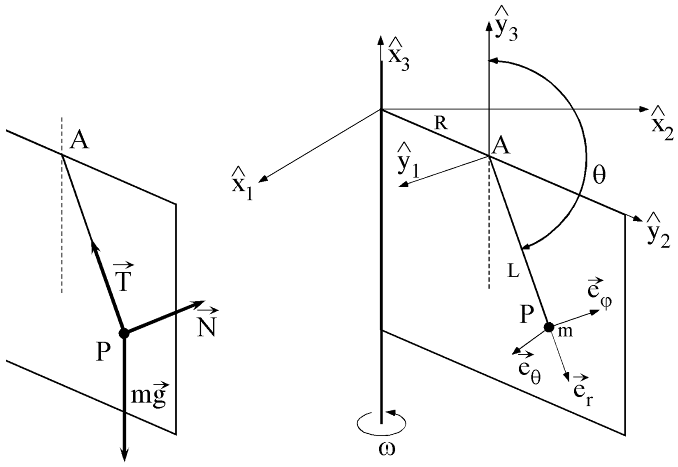
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 15
2014-2015

Exercice 1, Pendule sur la porte



Système, référentiels et repères : Le système est le pendule qui est assimilé à un point matériel P de masse m. Le référentiel absolu est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ et le référentiel relatif de la porte est décrit par un repère cartésien $(A, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ et un repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$. Le référentiel relatif est en mouvement autour de l'axe $\mathbf{X}_3$ par rapport au référentiel absolu avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ constante.

Contraintes : La distance entre l'origine O du repère sur l'axe de rotation et le point d'attache du pendule est fixe, i.e. $|\mathbf{OA}| = R$. Le pendule est de longeur L, i.e. $r = L = \text{cste} \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. Le pendule se trouve dans le plan de la porte qui tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe de rotation, i.e. $\dot{\phi} = \omega = \text{cste} \;\Rightarrow\; \ddot{\phi} = 0$. L'origine O est sur l'axe de rotation. Donc, sa vitesse et son accélération absolue sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(O) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(O) = \mathbf{0}$.

a) *Bilan des forces extérieures :*
- Poids : $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = -\,mg\,\mathbf{e}_z = -\,mg\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta)$
  où $\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$ pour $\pi/2 < \theta < \pi$,
- Réaction normale de la porte : $\mathbf{N} = N\,\mathbf{e}_\phi$,
- Tension : $\mathbf{T} = -\,T\,\mathbf{e}_r$.

b) *Equation du mouvement :* $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = m\,\mathbf{a}_a(P)$ dans le référentiel absolu. En tenant compte de la contrainte, l'accélération absolue $\mathbf{a}_a(P)$ du pendule P est exprimée comme,

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AP}) \;\;,$$

où
- $\mathbf{a}_a(A) = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OA}) = R\omega^2\,\mathbf{Y}_3\times(\mathbf{Y}_3\times\mathbf{Y}_2) = -\,R\omega^2\,\mathbf{Y}_2 = -\,R\omega^2\,(\sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta)\,,$
- $\mathbf{a}_r(P) = -\,L\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + L\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta\,,$
- $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r(P) = 2\omega L\dot{\theta}\,\mathbf{Y}_3\times\mathbf{e}_\theta = 2\omega L\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta)\times\mathbf{e}_\theta = 2\omega L\dot{\theta}\,\cos\theta\,\mathbf{e}_\phi\,.$
- $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AP}) = L\omega^2\,\mathbf{Y}_3\times(\mathbf{Y}_3\times\mathbf{e}_r) = -\,L\omega^2\sin\theta\,\mathbf{Y}_2 = -\,L\omega^2\sin\theta\,(\sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta)\,,$

en utilisant

- $\mathbf{Y}_2 = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$,
- $\mathbf{Y}_3 = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$.
- $\mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times (\sin\theta\,\mathbf{Y}_2 + \cos\theta\,\mathbf{Y}_3)) = -\sin\theta\,\mathbf{Y}_2$.

L'équation du mouvement s'écrit donc en composantes comme,

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : \quad -mg\cos\theta - T = -m\Big(\omega^2 (R + L\sin\theta)\sin\theta + L\dot{\theta}^2\Big) , \tag{1}$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\theta : \quad mg\sin\theta = -m\Big(\omega^2 (R + L\sin\theta)\cos\theta - L\ddot{\theta}\Big) , \tag{2}$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : \quad N = 2m\omega L\dot{\theta}\cos\theta . \tag{3}$$

Exercice 2, Le swing du golfeur

a) Le mouvement du point A est supposé connu, donc donné par une fonction $\alpha = \alpha(t)$ de telle sorte que $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$ sont aussi connus. On a : $\omega = \dot{\alpha} + \dot{\theta}$.

b) $\boldsymbol{v}_A$ et $\boldsymbol{a}_A$ sont à considérer comme connus. $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}$ implique $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_A + \big(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \boldsymbol{AP}$, d'où

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_A + \big(\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \boldsymbol{AP} + \big(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \Big(\big(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \boldsymbol{AP}\Big)$$

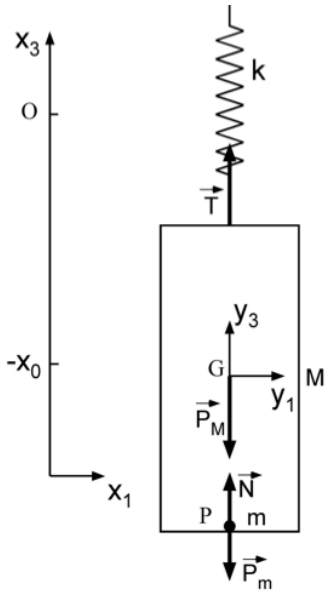
c) On nous donne que la force exercée sur P est le long de $\boldsymbol{AP}$. La projection de $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_P$ sur $\boldsymbol{e}_\theta$ donne $m\boldsymbol{a}_P \cdot \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0$. On note que $\boldsymbol{e}_\theta$ est dans la direction de $\dot{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \boldsymbol{AP}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \boldsymbol{AP}$ et $\big(\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \boldsymbol{AP}$. Le troisième terme de $\boldsymbol{a}_P$ ne contribue donc pas à cette projection. Il reste ainsi $0 = \big\{\boldsymbol{a}_A + \big(\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\big) \wedge \boldsymbol{AP}\big\} \cdot \boldsymbol{e}_\theta$ On veut expliciter $\boldsymbol{a}_A$. On peut procéder de la manière suivante quand on a l'habitude du mouvement circulaire. On sait qu'on a une composante centripète et une tangentielle. Avec le choix d'axes Ax' et Ay', en se référant aux formules pour l'accélération en coordonnées cylindriques, avec le choix d'axe utilisé ici, on écrit immédiatement : $\boldsymbol{a}_A = +R\dot{\alpha}^2\hat{\boldsymbol{x}}' - R\ddot{\alpha}\hat{\boldsymbol{y}}'$. Or par inspection du dessin : $\hat{\boldsymbol{x}}' = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ et $\hat{\boldsymbol{y}}' = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$. Donc

$$\boldsymbol{a}_A \cdot \boldsymbol{e}_\theta = R\dot{\alpha}^2(-\sin\theta) - R\ddot{\alpha}\cos\theta$$

L'équation du mouvement de A, dans la direction $\boldsymbol{e}_\theta$ devient ainsi

$$0 = -\dot{\alpha}^2\sin\theta - \ddot{\alpha}\cos\theta + \big(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}\big)\left(\frac{L}{R}\right)$$

Exercice 3, Boîte suspendue



Référentiels et repères : Le référentiel absolu du laboratoire est décrit par le repère cartésien $(O, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ et le référentiel relatif de la boîte est décrit par le repère cartésien $(G, \hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$.

a) **Boîte** (on néglige le poids m du point matériel) :

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P}_M = M\,\mathbf{g} = -\,Mg\,\hat{\mathbf{x}}_3$,
- Tension du resort : $\mathbf{T} = -\,kx_3\,\hat{\mathbf{x}}_3$.

Equation du mouvement : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\mathrm{ext}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{T} = M\,\mathbf{a}_a\,(G)$ dans le référentiel absolu. Le mouvement a lieu selon l'axe vertical. La projection de l'équation du mouvement selon l'axe $\hat{\mathbf{x}}_3$ donne,

$$M\ddot{x}_3 = -\,Mg -\,kx_3\ . \tag{4}$$

En utilisant le changement de variable,

$$u = x_3 + \frac{Mg}{k}\ , \tag{5}$$

l'équation du mouvement (4) devient,

$$\ddot{u} + \frac{k}{M}\,u = 0\ . \tag{6}$$

La solution de cette équation est de la forme,

$$u\,(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + \phi\right)\ , \tag{7}$$

où l'amplitude A et le déphasage ϕ sont déterminés par les conditions initiales. De plus, le changement de variable (5) implique que,

$$x_3\,(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + \phi\right) - \frac{Mg}{k}\ , \tag{8}$$

et la dérivée par rapport au temps de cette équation est donnée par,

$$\dot{x}_3\,(t) = -\,A\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + \phi\right)\ . \tag{9}$$

Les conditions initiales sont,

$$x_3\,(0) = -\,x_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_3\,(0) = 0\ , \tag{10}$$

ce qui implique que l'équation horaire (8) est de la forme,

$$x_3\,(t) = \frac{Mg -\,kx_0}{k}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) - \frac{Mg}{k}\ . \tag{11}$$

b) **Point matériel** :

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P}_m = m\,\mathbf{g} = -\,mg\,\hat{\mathbf{y}}_3$,
- Réaction normale de la boîte : $\mathbf{N} = N\,\hat{\mathbf{y}}_3$.

Equation du mouvement : $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{N} = m\,\mathbf{a}_a\,(P)$ dans le référentiel absolu où

$$\mathbf{a}_a\,(P) = \mathbf{a}_a\,(G) + \mathbf{a}_r\,(P) \ \ , \tag{12}$$

et $\mathbf{a}_r\,(P)$ représente l'accélération relative du point P par rapport au référentiel relatif de la boîte. La projection de cette équation vectorielle selon l'axe $\hat{\mathbf{y}}_3$ donne,

$$-\,mg + N = m\,(\ddot{x}_3 + \ddot{y}_3) \ \ . \tag{13}$$

Conditions de décollage :

- Absence de réaction normale : $N = 0$,
- Mouvement relatif vers le haut du point par rapport à la boîte : $\ddot{y}_3 > 0$.

Ces deux conditions s'expriment dans l'équation du mouvement (13) comme,

$$\ddot{y}_3 = -\,(g + \ddot{x}_3\,(0)) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_3 < -\,g \ . \tag{14}$$

La dérivée seconde de l'équation horaire (11) par rapport au temps est de la forme,

$$\ddot{x}_3\,(t) = -\,\frac{Mg -\,kx_0}{M}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) \ . \tag{15}$$

Ainsi, la condition de décollage (14) s'exprime explicitment comme,

$$-\,\frac{Mg -\,kx_0}{M}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) < -\,g \qquad \Rightarrow \qquad \left(1 - \frac{kx_0}{Mg}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) > 1 \ . \tag{16}$$

A l'opposé, la condition de non-décollage, s'exprime comme,

$$\left(1 - \frac{kx_0}{Mg}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) \leqslant 1 \ . \tag{17}$$

Cette condition doit être vraie en tout temps t. Ainsi, aux maxima et aux minima de la fonction $\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right)$, la condition de non-décollage s'exprime respectivement comme,

$$\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) &= \ \ 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 \geqslant 0 \ , \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) &= -\,1 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 \leqslant 2\,\frac{Mg}{k} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Des inéquations (18), on déduit la condition de non-décollage sur x_0, i.e.

$$0 \leqslant x_0 \leqslant 2\,\frac{Mg}{k} \ . \tag{19}$$

Note : cette condition est indépendante de la masse m du point matériel si $m \ll M$.