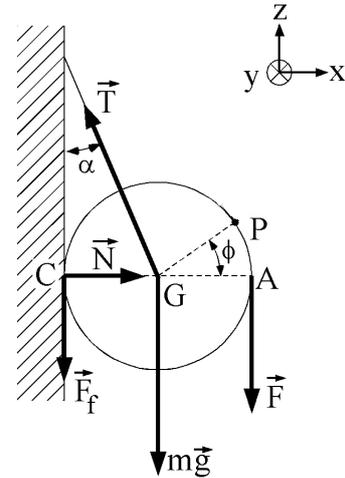


Exercice 1, Rouleau de papier

Système et repère : Le système est le rouleau de papier de masse m . On choisit le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \mathbf{e}_z$,
- Réaction normale du mur : $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_x$,
- Tension résultante dans les barres :
 $\mathbf{T} = T (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z)$,
- Force de frottement sec du papier contre le mur :
 $\mathbf{F}_f = -\mu_c N \mathbf{e}_z$,
- Force de traction verticale sur le papier : $\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_z$.



a) *Théorème du centre de masse :*

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G . \quad (1)$$

La dynamique a lieu dans le plan $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z$. Le centre de masse est immobile, i.e. $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$. La projection du théorème du centre de masse (1) sur les axes du repère cartésien donne,

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : -T \sin \alpha + N = 0 , \quad (2)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_z : -mg + T \cos \alpha - F - \mu_c N = 0 . \quad (3)$$

Du système d'équations (2) et (3), on tire,

$$T = \frac{mg + F}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} , \quad (4)$$

$$N = \frac{(mg + F) \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} . \quad (5)$$

Théorème du moment cinétique (en G) : $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}$.

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{GG} \wedge \mathbf{P}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{GC} \wedge \mathbf{N}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{GG} \wedge \mathbf{T}}_{=0} + \mathbf{GC} \wedge \mathbf{F}_f + \mathbf{GA} \wedge \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} . \quad (6)$$

La somme des moments de forces appliqués au centre de masse G vaut,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = R\mu_c N \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z - RF \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z = R(F - \mu_c N) \mathbf{e}_y . \quad (7)$$

Le moment cinétique du rouleau par rapport au centre de masse G vaut,

$$\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\omega} = I_G \dot{\phi} \mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = I_G \ddot{\phi} \mathbf{e}_y , \quad (8)$$

où $\dot{\phi}$ est défini positif pour une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. Le théorème du moment cinétique (6) implique que

$$I_G \ddot{\phi} = R(F - \mu_c N) . \quad (9)$$

L'accélération angulaire du rouleau est obtenue en substituant l'expression (5) de la réaction normale dans l'équation du mouvement (9), i.e.

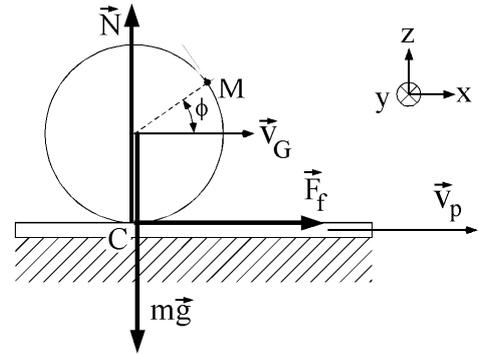
$$\ddot{\phi} = \frac{R}{I_G} \left(F - \frac{(mg + F) \mu_c \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} \right). \quad (10)$$

Exercice 2, Cylindres sur une feuille de papier

Système et repère : Le système est le cylindre de masse m . On choisit le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$,
- Réaction normale : $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_z$,
- Force de frottement sec : $\mathbf{F}_f = F_f\mathbf{e}_x$.



a) Les points G et C appartiennent au solide. Par conséquent, leurs vitesses sont reliées par,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GC} = v_G \mathbf{e}_x + R\omega \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z = (v_G + R\omega) \mathbf{e}_x. \quad (11)$$

où ω est défini positif pour une rotation dans le sens trigonométrique. La condition de roulement sans glissement du cylindre sur la feuille de papier requiert que la vitesse du point de contact du cylindre par rapport au papier soit nulle. Cela signifie que la vitesse du point de contact doit être égale à la vitesse de traction de la feuille. i.e.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_p = v_p \mathbf{e}_x. \quad (12)$$

En comparant la condition de roulement sans glissement (12) avec l'équation (11), on obtient la vitesse angulaire du cylindre, i.e.

$$\omega = \frac{v_p - v_G}{R}. \quad (13)$$

b) *Théorème du centre de masse :*

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a}_G. \quad (14)$$

La dynamique a lieu dans le plan $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z$. La projection du théorème du centre de masse (14) sur les axes du repère cartésien donne,

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : F_f = ma_G, \quad (15)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_z : -mg + N = 0. \quad (16)$$

Théorème du moment cinétique (en G) : $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}$.

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{GG} \wedge \mathbf{P}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{GC} \wedge \mathbf{N}}_{=0} + \mathbf{GC} \wedge \mathbf{F}_f = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}. \quad (17)$$

La somme des moments de forces appliqués au centre de masse G vaut,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = -RF_f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x = -RF_f \mathbf{e}_y. \quad (18)$$

Le moment cinétique du rouleau par rapport au centre de masse G vaut,

$$\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\omega} = -\lambda m R^2 \dot{\omega} \mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = -\lambda m R^2 \ddot{\omega} \mathbf{e}_y . \quad (19)$$

Le théorème du moment cinétique (17) implique que

$$\lambda m R^2 \dot{\omega} = R F_f , \quad (20)$$

qui à l'aide de l'équation du mouvement (15) devient,

$$a_G = \lambda R \dot{\omega} . \quad (21)$$

La dérivée par rapport au temps de l'équation (13) vaut,

$$\dot{\omega} = \frac{a_p - a_G}{R} \quad \Rightarrow \quad a_G = a_p - R \dot{\omega} . \quad (22)$$

En identifiant les équations (21) et (22), on obtient l'accélération angulaire du cylindre, i.e.

$$\dot{\omega} = \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) \frac{a_p}{R} . \quad (23)$$

c) En substituant l'équation (23) dans l'équation (21), on obtient l'accélération du centre de masse du cylindre, i.e.

$$a_G = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right) a_p . \quad (24)$$

- Cylindre plein ($\lambda = \frac{1}{2}$) : $a_G = \frac{a_p}{3}$,
- Cylindre creux ($\lambda = 1$) : $a_G = \frac{a_p}{2}$.

Ainsi, le cylindre creux est le plus rapide!

En multipliant le numérateur et le dénominateur du membre de droite de l'équation (24) par mR^2 , on constate que dans la limite où le moment d'inertie d'un cylindre devient infinie, i.e. $\lambda m R^2 \rightarrow \infty$, la force à exercer pour le faire rouler devient elle aussi infinie. Cela signifie qu'il devient impossible de le faire tourner. Par conséquent, dans ce cas, le cylindre est immobile dans le référentiel relatif de la feuille. Donc, l'accélération absolue de son centre de masse sera identique à l'accélération de traction de la feuille de papier, i.e. $a_G = a_p$. Dans le cas limite inverse où le moment d'inertie du cylindre devient négligeable, i.e. $\lambda m R^2 \rightarrow 0$, la force à exercer pour le faire rouler devient elle aussi nulle. Cela signifie qu'il devient impossible de ne pas la faire tourner. Par conséquent, dans ce cas, le centre de masse du cylindre est immobile dans le référentiel absolu de la table, i.e. $a_G = 0$.

Exercice 3, Rotation d'une hélice à deux pales

a) Le moment cinétique de la barre évalué par rapport à son centre de masse G est

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) , \quad (25)$$

où $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire totale qui se décompose en une vitesse angulaire de précession $\boldsymbol{\Omega}$ autour de l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ et une vitesse angulaire de rotation propre $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe \mathbf{e}_3 . Dans le repère d'inertie $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ lié à la barre, le tenseur d'inertie est diagonal, i.e.

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} I_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\perp} \end{pmatrix} . \quad (26)$$

Dans ce repère, les vecteurs vitesse angulaire s'écrivent en composantes comme

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \phi \\ -\Omega \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} . \quad (27)$$

Par conséquent, les équations (25)-(27) impliquent que

$$\mathbf{L}_G = \begin{pmatrix} I_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \sin \phi \\ -\Omega \cos \phi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{\parallel} \Omega \sin \phi \\ -I_{\perp} \Omega \cos \phi \\ I_{\perp} \omega \end{pmatrix} = -I_{\parallel} \Omega \sin \phi \mathbf{e}_1 - I_{\perp} \Omega \cos \phi \mathbf{e}_2 + I_{\perp} \omega \mathbf{e}_3 . \quad (28)$$

b) Le moment cinétique \mathbf{L}_O de la barre par rapport à l'origine O est lié au moment cinétique \mathbf{L}_G de la barre par rapport au centre de masse G par,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OG} \wedge M \mathbf{v}_G + \mathbf{L}_G . \quad (29)$$

Le centre de masse G tourne à vitesse angulaire Ω constante autour de l'origine O en décrivant un cercle de rayon R . Ainsi,

$$\mathbf{OG} \wedge M \mathbf{v}_G = R \mathbf{e}_3 \wedge MR \Omega \mathbf{e}_{\psi} = MR^2 \Omega \hat{\mathbf{z}} , \quad (30)$$

et

$$\mathbf{L}_O = MR^2 \Omega \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{L}_G . \quad (31)$$

c) Le moment cinétique \mathbf{L}_G s'écrit formellement en composantes dans le repère d'inertie $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ lié à la barre comme,

$$\mathbf{L}_G = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i . \quad (32)$$

La dérivée par rapport au temps de cette relation vaut,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \frac{d}{dt} \mathbf{e}_i . \quad (33)$$

En utilisant la formule de Poisson pour les dérivées des vecteurs de base du repère d'inertie, i.e.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{e}_i , \quad (34)$$

et l'expression (32) pour le moment cinétique \mathbf{L}_G on montre que,

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \frac{d}{dt} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G . \quad (35)$$

En substituant l'équation (35) dans l'équation (33), celle-ci devient,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i . \quad (36)$$

En utilisant la dérivée de l'équation (31) par rapport au temps, i.e.

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} , \quad (37)$$

l'équation (36) est finalement mise sous la forme,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i . \quad (38)$$

d) Le théorème du moment cinétique

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}_O . \quad (39)$$

Le moment de force $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ à appliquer en O pour que la barre ait le mouvement prescrit par l'équation d'Euler (38) est donc de la forme

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i . \quad (40)$$

A l'aide des équations (27) et (28), et de l'identité $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}$, on obtient,

$$(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \phi \\ -\Omega \cos \phi \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -I_{\parallel} \Omega \sin \phi \\ -I_{\perp} \Omega \cos \phi \\ I_{\perp} \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega \omega \sin \phi \\ (I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} , \quad (41)$$

et

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -I_{\parallel} \Omega \sin \phi \\ -I_{\perp} \Omega \cos \phi \\ I_{\perp} \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{\parallel} \Omega \omega \cos \phi \\ I_{\perp} \Omega \omega \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (42)$$

En substituant les équations (41) et (42) dans l'équation (40), on obtient l'expression explicite du moment de force $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{\text{ext}} &= \begin{pmatrix} -I_{\parallel} \Omega \omega \cos \phi \\ (2I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega \omega \sin \phi \\ (I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= -I_{\parallel} \Omega \omega \cos \phi \mathbf{e}_1 + (2I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega \omega \sin \phi \mathbf{e}_2 + (I_{\perp} - I_{\parallel}) \Omega^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (43)$$