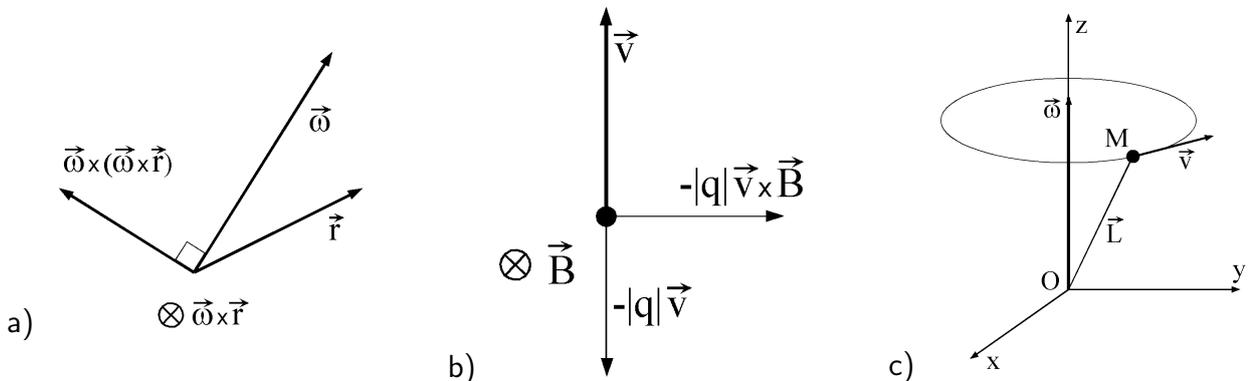




Exercice 1, Produit vectoriel



- c) Soit \mathbf{L} un vecteur de norme constante défini par les points O et M où O est un point fixe et M l'extrémité du vecteur \mathbf{L} . Soit par ailleurs, un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ constant.

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}) = 0$$

d'où la vitesse du point M (c'est-à-dire $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$) est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$.

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}) = 0$$

donc $\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(L^2)}{dt} = 0$ donc $\|\mathbf{L}\| = \text{cste}$ et la vitesse de M est perpendiculaire à \mathbf{L} .

D'où l'angle $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega})$ est constant et \mathbf{L} « tourne » autour de $\boldsymbol{\omega}$. Ce mouvement est appelé « précession ».

- d) Soient (x_a, y_a, z_a) les coordonnées du vecteur \mathbf{a} , (x_b, y_b, z_b) celles du vecteur \mathbf{b} et (x_c, y_c, z_c) celles du vecteur \mathbf{c} .

On a :

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_b z_c - z_b y_c \\ x_c z_b - x_b z_c \\ x_b y_c - y_b x_c \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_b z_c - z_b y_c \\ x_c z_b - x_b z_c \\ x_b y_c - y_b x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a x_b y_c - y_a y_b x_c - z_a x_c z_b + z_a x_b z_c \\ z_a y_b z_c - z_a z_b y_c - x_a x_b y_c + x_a y_b x_c \\ x_a x_c z_b - x_a x_c z_b - y_a y_b z_c + y_a z_b y_c \end{pmatrix}$$

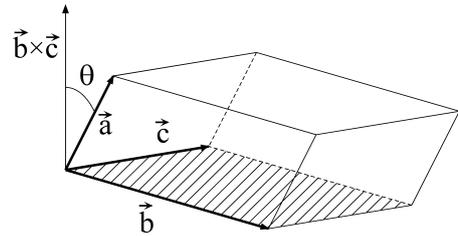
Or :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (x_a x_c + y_a y_c + z_a z_c) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} - (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_a x_c x_b + y_a y_c x_b + z_a z_c x_b - (x_a x_b x_c + y_a y_b x_c + z_a z_b x_c) \\ x_a x_c y_b + y_a y_c y_b + z_a z_c y_b - (x_a x_b y_c + y_a y_b y_c + z_a z_b y_c) \\ x_a x_c z_b + y_a y_c z_b + z_a z_c z_b - (x_a x_b z_c + y_a y_b z_c + z_a z_b z_c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_a x_b y_c - y_a y_b x_c - z_a x_c z_b + z_a x_b z_c \\ z_a y_b z_c - z_a z_b y_c - x_a x_b y_c + x_a y_b x_c \\ x_a x_c z_b - x_a x_c z_b - y_a y_b z_c + y_a z_b y_c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc bien $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Exercice 2, Produit scalaire et produit vectoriel

- a) • La norme $\|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ du vecteur $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ est l'aire du parallélogramme (i.e. surface hachurée) engendré par les deux vecteurs \mathbf{b} et \mathbf{c} .
- Le scalaire $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} ; c'est le produit de la base $\|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\|$ et de la hauteur $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$.



- b) Le produit vectoriel $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ est donné par

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & x \\ \hat{y} & 0 & y \\ \hat{z} & \omega & z \end{vmatrix} = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

D'autre part, la vitesse \mathbf{v} s'écrit en composantes comme,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Par identification des équations vectorielles (1) et (2) on obtient le système d'équations scalaires,

$$\dot{x} = -\omega y, \quad (3)$$

$$\dot{y} = \omega x, \quad (4)$$

$$\dot{z} = 0. \quad (5)$$

L'équation (5) implique que le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe z (où z est constant). En dérivant l'équation (3) par rapport au temps et en la substituant dans l'équation (4) et vis versa, on obtient,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad (6)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y. \quad (7)$$

Les équations du mouvement selon les axes x et y sont des oscillateurs harmoniques de pulsation ω . Les solutions qui satisfont les systèmes d'équations (3)-(7) sont de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (8)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (9)$$

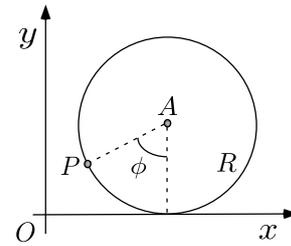
où A est l'amplitude du mouvement. Ces solutions représentent l'équation paramétrique d'un cercle. Le mouvement du point matériel P a donc lieu selon un cercle de rayon A centré sur l'axe \hat{z} et se trouvant dans un plan perpendiculaire à \hat{z} .

- c) Les projections du vecteur \mathbf{OP} selon les axes de coordonnées \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont

$$\mathbf{OP} = r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (10)$$

Exercice 3, Point sur roue

- a) On choisit le sens positif des angles selon le sens des aiguilles d'une montre. Lorsque la roue roule vers la droite, son axe A parcourt une distance horizontale $R\phi$. Ainsi les coordonnées du point A sont :



$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\phi \\ R \end{pmatrix} .$$

Les coordonnées cartésiennes du point P correspondent aux composantes du vecteur $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$ exprimées dans la base Oxy :

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\phi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ -R \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\phi - \sin \phi) \\ R(1 - \cos \phi) \end{pmatrix} . \quad (11)$$

- b) Pour déterminer la variation du point P lorsque ϕ varie, on prend la dérivée première des coordonnées cartésiennes (11) de P par rapport à ϕ :

$$\begin{cases} x'_P(\phi) = \frac{dx_P}{d\phi} = R(1 - \cos \phi) , \\ y'_P(\phi) = \frac{dy_P}{d\phi} = R \sin \phi . \end{cases} \quad (12)$$

Dans la limite des petits angles (i.e. ϕ proche de 0 et P proche du sol), le développement limité de ϕ implique que $\sin \phi \simeq \phi$ et $\cos \phi \simeq 1$. La variation des coordonnées cartésiennes (12) de P par rapport à ϕ se réduit à,

$$\begin{cases} x'_P(\phi) = \frac{dx_P}{d\phi} \simeq R(1 - 1) = 0 , \\ y'_P(\phi) = \frac{dy_P}{d\phi} \simeq R\phi . \end{cases} \quad (13)$$

Ainsi, lorsque ϕ augmente, P se déplace uniquement dans la direction Oy : **son mouvement est vertical**.

- c) Les points pour lesquels l'angle $\phi = \{0, \pi, 2\pi\}$ sont des exemples de points caractéristiques.

