ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 11
2014-2015

Exercice 1, Projeté d'une balançoire

a) La force de traction du fil **T** ne travaille pas. En effet, elle est toujours perpendiculaire à la trajectoire, donc comme le travail est défini par :

$$W = \int \mathbf{T} \cdot \mathbf{dr} \tag{1}$$

le produit $\mathbf{T} \cdot \mathbf{dr}$ est toujours nul. La force de gravitation est quant à elle une force conservative, on a donc :

$$E = E_{cin} + E_{pot} = cste \tag{2}$$

Pour $\theta = \theta_{max}$, on a $E_{cin} = 0$, et seule reste la contribution de l'énergie potentielle donnée par :

$$E_{pot} = E = mg(H_0 - R\cos\theta_{max}) \tag{3}$$

avec $E_{pot} = 0$ pour $H = 0$.
Pour un θ donné, on a donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgH = mg(H_0 - R\cos\theta_{max}) \tag{4}$$

où $H = H_0 - R\cos\theta$.
On trouve donc la vitesse du point matériel situé à un angle θ :

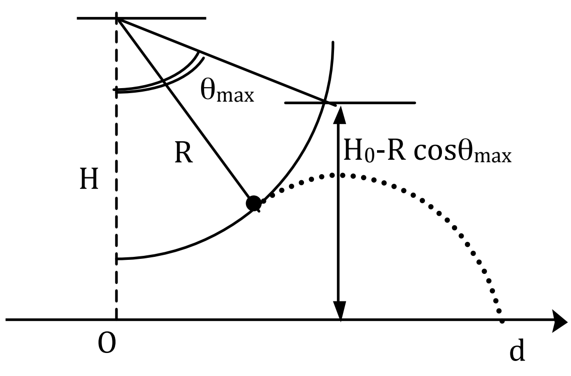
$$v = \sqrt{2gR(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \tag{5}$$

b) L'angle que fait la vitesse $\mathbf{v}_0$ en θ par rapport à l'horizontale est $\alpha = \theta$, par de simples relations géométriques.

c) Au sol, $E_{pot} = 0$, donc :

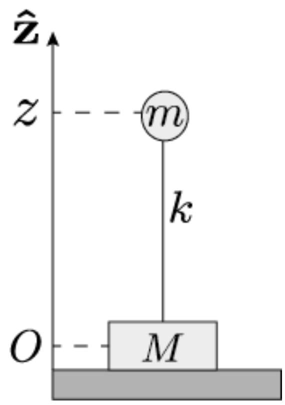
$$E_{cin} = mg(H_0 - R\cos\theta_{max}) \tag{6}$$

Donc tout se passe comme si l'enfant tombait d'une hauteur $H_0 - R\cos\theta_{max}$.



Facultatif : on peut calculer la distance d en fonction de θ et θ_{max}, en écrivant $x(t)$ et $y(t)$ pour un corps soumis à l'action de la pesanteur.

Exercice 2, Jokari vertical



Le mouvment a lieu uniquement selon l'axe vertical $\hat{\mathbf{z}}$.

a) *Bilan des forces extérieures (balle) :*
- Poids de la balle : $\mathbf{P}_m = -\,mg\,\hat{\mathbf{z}}$,
- Force élastique du bloc sur la balle : $\mathbf{F}_m = -\,kz\,\hat{\mathbf{z}}$.

b) *Equation du mouvement (balle) :* $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{F}_m = m\,\mathbf{a}$.
L'équation du mouvement selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ est donnée par,

$$-\,mg - \,kz = m\ddot{z} \qquad \text{ou} \qquad \ddot{z} + \frac{k}{m}\,z = -\,g\ . \qquad (7)$$

c) *Bilan des forces extérieures (bloc) :*
- Poids du bloc : $\mathbf{P}_M = -\,Mg\,\hat{\mathbf{z}}$,
- Réaction normale du sol sur le bloc : $\mathbf{N} = N\,\hat{\mathbf{z}}$,
- Force élastique de la balle sur le bloc : $\mathbf{F}_M = -\,\mathbf{F}_m = kz\,\hat{\mathbf{z}}$.

d) *Equilibre des forces (bloc) :* $\Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{F}_M + \mathbf{N} = \mathbf{0}$. L'équilibre des forces selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ est donné par,

$$-\,Mg + kz + N = 0\ . \qquad (8)$$

e) Le bloc décolle lorsque la réaction normale s'annule, i.e. $N = 0$. Par conséquent, la hauteur $z = h$ à laquelle le bloc décolle est déterminée par l'équation d'équilibre (8) dans le cas limite où $N = 0$, i.e.

$$h = \frac{Mg}{k}\ . \qquad (9)$$

f) L'équation horaire pour la balle est obtenue en intégrant l'équation du mouvement (7) par rapport au temps. En faisant le changement de variable,

$$u = z + \frac{mg}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{u} = \ddot{z}\ , \qquad (10)$$

l'équation du mouvement du mouvement (7) peut être mise sous la forme

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}\,u = 0\ , \qquad (11)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ dont la solution générale est de la forme,

$$u\,(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right)\ , \qquad (12)$$

De la relation (10) on tire l'équation horaire $z\,(t)$ du mouvement vertical de la balle est

$$z\,(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) - \frac{mg}{k}\ . \qquad (13)$$

L'amplitude du mouvement est maximale à $t = 0$, ce qui implique que le déphasage est nul, i.e. $\phi = 0$. En utilisant la condition initiale

$$z\,(0) = h = \frac{Mg}{k}\ , \qquad (14)$$

l'équation (13) implique que l'amplitude du mouvement est donnée par,

$$A = \frac{(M+m)\,g}{k}\ . \qquad (15)$$

Finalement, l'équation horaire de la balle le premier rebond sur le bloc (en $z = 0$) peut être réécrite comme

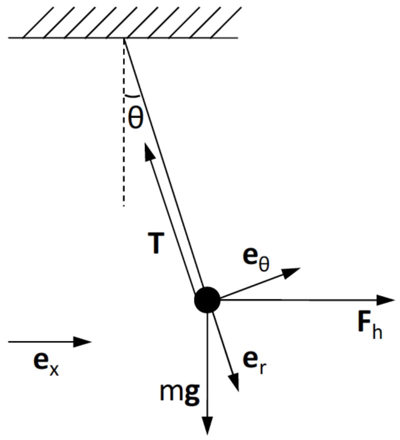
$$z(t) = \left(\frac{(M+m)\,g}{k}\right)\cos(\omega t) - \frac{mg}{k}\ . \tag{16}$$

Exercice 3, Gotham City

a) *Bilan des forces extérieures :* Trois forces s'exercent sur Batman. La tension du fil $\mathbf{T}$, la pesanteur $m\mathbf{g}$ et la force exercée par le souffle des hélices $\mathbf{F}_h$.

La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$m\mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{F}^{\,\text{ext}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_h \tag{17}$$



Equations du mouvement : En projetant sur un repère polaire, cela donne :

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta \tag{18}$$

$$= (-T + mg\cos\theta)\,\mathbf{e}_r + (-mg\sin\theta + F_h))\,\mathbf{e}_\theta \tag{19}$$

Nous savons de plus que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ car $r = l$, donc :

$$\begin{aligned} &\text{Selon } \mathbf{e}_r :\ -mr\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ &\text{Selon } \mathbf{e}_\theta :\ mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F_0\sin(\Omega t) \end{aligned} \tag{20}$$

Dans l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$. Donc on obtient finalement l'équation du mouvement selon $\mathbf{e}_\theta$ (l'équation du mouvement selon $\mathbf{e}_r$ fait intervenir la force de tension de la corde qui ne nous intéresse pas ici) :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta + F_0\sin(\Omega t) \implies \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F_0}{ml}\sin(\Omega t) \tag{21}$$

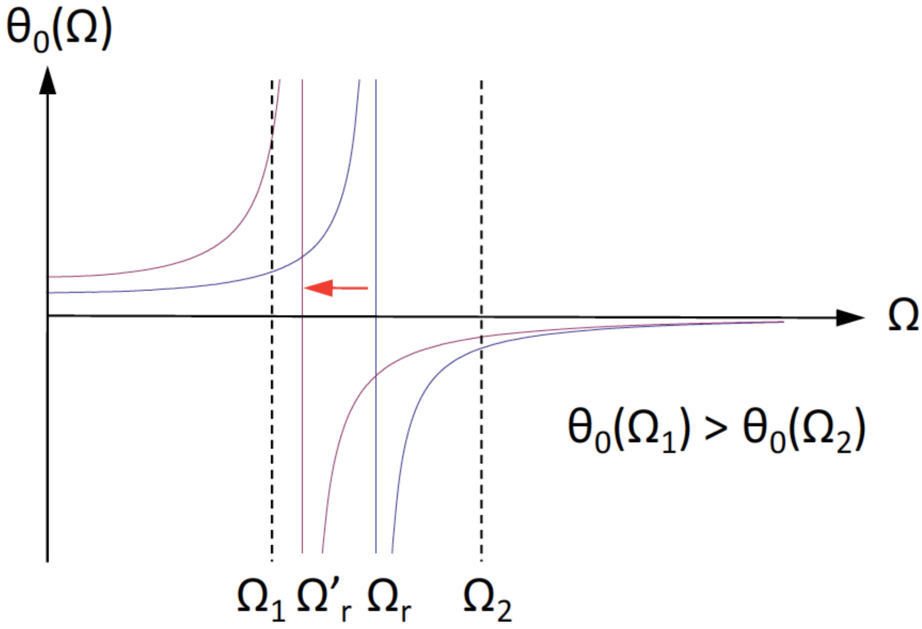
avec $\omega_0^2 = g/l$.

b) En suivant l'indication, on sait que la solution aura la forme $\theta(t) = \theta_0\sin(\Omega t)$. On l'injecte dans l'équation du mouvement précédemment trouvée :

$$\begin{aligned} &-\Omega^2\theta_0\sin(\Omega t) + \omega_0^2\theta_0\sin(\Omega t) = \frac{F_0}{ml}\sin(\Omega t) \\ &\theta_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = \frac{F_0}{ml} \\ &\theta_0 = \frac{F_0}{ml}\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \tag{22}$$

θ_0 est l'amplitude des oscillations. La pulsation de résonnance vaut donc $\Omega_r = \omega_0$.

c) Dans l'approximation des petits angles, la période est indépendante de l'amplitude d'oscillation, ce qui n'est plus vrai lorsque l'on sort des limites de validité de l'approximation ; la période augmente alors avec l'amplitude, la pulsation de résonnance va donc diminuer lorsque l'amplitude augmente. Cela signifie que la courbe $\theta_0(\Omega)$ va être déplacée vers la gauche (fréquence de résonnance diminuée, voir figure ci-dessous ; Batman a alors tout intérêt à choisir une fréquence légèrement supérieure à la fréquence de résonnance afin de minimiser l'amplitude des oscillations, et ainsi optimiser ses chances de survie.


θ0(Ω)
Ω
θ0(Ω1) > θ0(Ω2)
Ω1 Ω'r Ωr Ω2