ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 17

2014-2015

Exercice 1, La grosse Bertha

a) *Conservation de la quantité de mouvement :*

Avant le tir, le système composé du canon et du boulet est au repos dans le référentiel terrestre. Par conséquent, la somme vectorielle de la quantité de mouvement totale est nulle. Par conservation de la quantité de mouvement lors du tir, la somme vectorielle des quantités de mouvement du canon et du boulet est encore nulle juste après le tir, i.e.

$$M\mathbf{V} + m\mathbf{v} = \mathbf{0} \ , \tag{1}$$

où M et m sont respectivement les masses du canon et du boulet, et $\mathbf{V}$ et $\mathbf{v}$ sont respectivement les vitesses du canon et du boulet juste après le tir. Il est utile de mentionner que la durée du tir est suffisamment courte pour que l'action de la force de pesanteur soit négligeable et qu'ainsi la quantité de mouvement totale du système soit conservée. En projetant l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon la ligne de tir, on obtient,

$$-MV + mv = 0 \ . \tag{2}$$

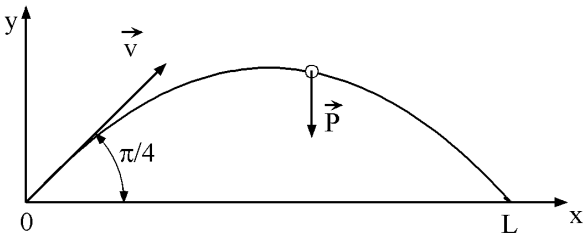
Ainsi la norme V de la vitesse de recul du canon juste après le tir est de la forme,

$$V = \frac{m}{M} v \ . \tag{3}$$

L'énergie cinétique du canon K due au mouvement de recul que le dispositif d'amortissement devait absorber est donnée par,

$$K = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v^2 \ . \tag{4}$$

La détermination de la norme de la vitesse v du boulet juste après le tir en fonction de la portée au sol est un problème de balistique qui a déjà été traité dans la série d'exercices sur la balistique. La trajectoire balistique du boulet après le tir se trouve dans le plan vertical Oxy (cf. figure ci-dessous).



Elle est décrite par le système d'équations,

$$x\,(t) = v\,\cos\alpha\, t \ , \tag{5}$$

$$y\,(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v\,\sin\alpha\, t \ , \tag{6}$$

où α est l'angle entre la ligne de tir et l'horizontale. Lorsque le boulet atteint le sol au temps t_f et au point d'impact $(x\,(t_f)\,, y\,(t_f)) = (L, 0)$, les équations balistiques (5) et (6) satisfont,

$$L = v\,\cos\alpha\, t_f \ , \tag{7}$$

$$0 = -\frac{1}{2} g t_f + v\,\sin\alpha \ . \tag{8}$$

Des équations (7) et (8), on tire l'expression de la norme de la vitesse initiale, i.e.

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\,\sin\alpha\,\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{gL}{\sin(2\alpha)}}\ . \tag{9}$$

Par conséquent, la longueur de tir L est donnée par,

$$L = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha)\ . \tag{10}$$

La portée du canon correspond à la longueur de tir maximale qui est atteinte pour un angle de tir $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, l'expression (9) pour la vitesse se réduit à

$$v = \sqrt{gL}\ . \tag{11}$$

Finalement, l'énergie cinétique du canon (4) que le dispositif d'amortissement devait absorber se réduit à,

$$K = \frac{1}{2}\frac{m^2 gL}{M}\ . \tag{12}$$

Application numérique : $K = 1962\,J$.

Exercice 2, Centre de masse d'un cône inhomogène

a) La masse du cône M se calcule à l'aide d'une intégrale volumique comme suit :

$$M = \int_V dm = \int_V \rho(z) dV = \int_V (\alpha z + \beta)\, dV\ , \tag{13}$$

où V est le volume du cône. Pour calculer cette intégrale, on utilisera les coordonnées cylindriques, en notant que la surface du cône est délimitée par l'équation :

$$\frac{z}{r} = \frac{h}{R} \ \Rightarrow\ r = \frac{zR}{h}\ . \tag{14}$$

De plus, l'élément de volume infinitésimal dV s'exprime en coordonnées cylindriques $dV = r dr d\theta dz$. Or donc, l'intégrale 13 s'écrit :

$$M = \int_V (\alpha z + \beta)\, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{zR}{h}} (\alpha z + \beta)\, r dr d\theta dz \tag{15}$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (\alpha z + \beta)\, z^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{\alpha h^4}{4} + \frac{\beta h^3}{3}\right) \tag{16}$$

$$= \pi R^2 \left(\frac{\alpha h^2}{4} + \frac{\beta h}{3}\right)\ . \tag{17}$$

b) La position du centre de masse $\boldsymbol{r}_{cm}$ est définie comme :

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \boldsymbol{r} dm \ . \tag{18}$$

Dans le cas de notre cône, sa symétrie radiale nous indique que son centre de masse se trouve le long de l'axe Oz, i.e. $x_{cm} = y_{cm} = 0$. Il nous reste donc à déterminer z_{cm} :

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int_V z dm = \frac{1}{M}\int_V z\rho(z) dV = \frac{1}{M}\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{zR}{h}} z\left(\alpha z + \beta\right) r dr d\theta dz \tag{19}$$

$$= \frac{1}{M}\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3\left(\alpha z + \beta\right) dz = \pi\frac{R^2}{M}\left(\frac{\alpha h^3}{5} + \frac{\beta h^2}{4}\right) \ . \tag{20}$$

Et en utilisant la valeur de M donnée par l'équation 17 on obtient finalement :

$$z_{cm} = \frac{\frac{\alpha h^2}{5} + \frac{\beta h}{4}}{\frac{\alpha h}{4} + \frac{\beta}{3}} \ . \tag{21}$$

c) Il suffit de reprendre l'équation 21 en considérant une masse volumique constante $\rho(z) = \rho$, i.e. $\alpha = 0$ et $\beta = \rho$. On obtient ainsi :

$$z_{cm} = \frac{3}{4}h \ . \tag{22}$$

Exercice 3, La Fusée

a) La 2^e loi de Newton appliquée à la fusée, qui est un système de masse $M + m$ variable avec une vitesse d'éjection $\mathbf{u}$, est donnée par,

$$(M + m)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{d(M + m)}{dt}\mathbf{u} \ , \tag{23}$$

où la masse M de la fusée à vide est constante (i.e. $dM/dt = 0$) et le débit de gaz brûlés est négatif (i.e. $dm/dt < 0$) puisque la fusée perd du combustible. La seule force extérieure qui agit sur le système est le poids de la fusée et de son combustible, i.e.

$$\mathbf{F} = (M + m)\,\mathbf{g} \ . \tag{24}$$

Par conséquent, l'accélération de la fusée est de la forme,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{M + m}\frac{dm}{dt}\mathbf{u} \ . \tag{25}$$

Le mouvement de la fusée a lieu selon l'axe vertical z défini par le vecteur orthonormé $\mathbf{e}_z$ dirigé vers le haut. On projète d'abord les vecteurs selon l'axe vertical, i.e.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_z \ , \qquad \mathbf{g} = -\,g\,\mathbf{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u} = -\,u\,\mathbf{e}_z \ ,$$

puis l'équation du mouvement (25), i.e.

$$\frac{dv}{dt} = -\,g - \frac{u}{M+m}\,\frac{dm}{dt}\ . \tag{26}$$

La condition de décollage est une accélération positive de la fusée vers le haut (i.e. $dv/dt > 0$). Cette condition se traduit dans l'équation du mouvement (26) par,

$$\Big|\frac{dm}{dt}\Big| = -\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{<0} > \frac{(M+m)\,g}{u}\ . \tag{27}$$

Par conséquent, si le débit $|\frac{dm}{dt}|$ de gaz brûlés par la fusée lors de son lancement est supérieur à $\frac{(M+m)g}{u}$ la fusée décolle !

b) La masse de combustible suit la loi d'évolution,

$$m = m_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\ . \tag{28}$$

Ainsi, la dérivée temporelle de cette relation vaut,

$$\frac{dm}{dt} = -\,\frac{m_0}{\tau}\ . \tag{29}$$

En substitutant l'équation (28), évaluée au temps de décollage $t = 0$, et l'équation (29) dans la condition de décollage (27), celle-ci se réduit à

$$\frac{m_0}{\tau} > \frac{(M+m_0)\,g}{u} \qquad \Rightarrow \qquad \tau < \frac{u}{g}\,\frac{m_0}{M+m_0}\ . \tag{30}$$

c) En substituant les relations (28) et (29) dans l'équation du mouvement (26), celle-ci devient,

$$\frac{dv}{dt} = -\,g + \frac{u}{\tau}\,\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right) - \frac{t}{\tau}} \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\,g\tau\,d\left(\frac{t}{\tau}\right) - u\,\frac{d\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{t}{\tau} - \left(1+\frac{M}{m_0}\right)}\ . \tag{31}$$

En intégrant l'équation (31) on obtient,

$$v\,(t) = -\,g\,t - u\,\ln\left(C\left(\frac{t}{\tau} - \left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right)\right)\ , \tag{32}$$

où C est une constante d'intégration. La condition initiale sur la vitesse avant le décollage de la fusée, i.e. $v\,(0) = 0$, implique que

$$\ln\left(-\,C\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\,C\left(1+\frac{M}{m_0}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = -\,\frac{m_0}{M+m_0}\ . \tag{33}$$

Ainsi, l'expression de la vitesse (32) devient,

$$v\,(t) = -\,g\,t - u\,\ln\left(1 - \left(\frac{m_0}{M+m_0}\right)\frac{t}{\tau}\right)\ . \tag{34}$$