



Mécanique - Corrigé de la série 4

2014-2015

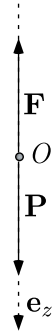
Exercice 1, Chute avec force de frottement visqueux

Référentiel, repère et système : on choisit comme référentiel la terre et comme repère l'axe de coordonnée vertical $\mathbf{e}_z$ dirigé vers le bas dont l'origine O correspond à la position de repos du corps de masse m .

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg \mathbf{e}_z$,
- Force de frottement : $\mathbf{F} = -b \mathbf{v} = -bv \mathbf{e}_z$.

Loi du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = m \mathbf{a}$. Selon l'axe $\mathbf{e}_z$, l'équation du mouvement est donc donnée par



$$mg - b\dot{z} = m\ddot{z} . \quad (1)$$

On peut écrire l'équation du mouvement en terme de la norme $v = \dot{z}$ de la vitesse, i.e.

$$mg - bv = m\dot{v} . \quad (2)$$

- a) La vitesse limite v_l est atteinte lorsque l'accélération est nulle (i.e. $\dot{v} = 0$) et que les forces de pesanteur et de frottement sont égales et opposées. De l'équation (2), on déduit alors l'expression de la vitesse limite,

$$v_l = \frac{mg}{b} . \quad (3)$$

- b) A l'aide du changement de variable

$$u = mg - bv \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = -b\dot{v} , \quad (4)$$

l'équation différentielle (2) s'écrit comme,

$$\dot{u} = -\frac{b}{m}u . \quad (5)$$

L'intégration de l'équation différentielle (5) par rapport au temps donne,

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) . \quad (6)$$

A l'instant initial, le corps est au repos, i.e. $v(0) = 0$. Par conséquent, l'équation (4) implique que,

$$u(0) = mg , \quad (7)$$

et donc l'équation (6) devient,

$$u(t) = mg \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) , \quad (8)$$

où

$$\tau = \frac{m}{b} . \quad (9)$$

En substituant l'équation (8) dans l'équation (4) et en utilisant la relation (3), l'équation (4) devient,

$$v(t) = v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) . \quad (10)$$

- c) La tangente $T(t)$ correspond au développement limité au premier ordre de l'expression (10) de $v(t)$ autour de $t/\tau = 0$, i.e.

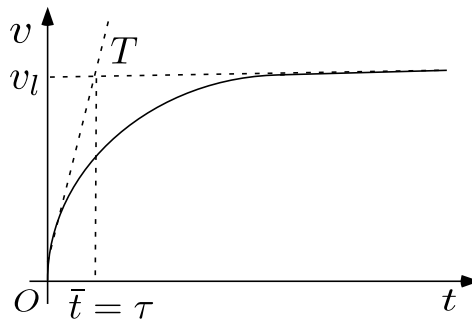
$$T(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow 0} v(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow 0} v_l \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \dots \right) \right) \simeq \frac{v_l}{\tau} t . \quad (11)$$

L'asymptote horizontale A correspond à la limite de l'expression (10) lorsque $t/\tau \rightarrow \infty$, i.e.

$$A = \lim_{t/\tau \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow \infty} v_l (1 + \dots) \simeq v_l . \quad (12)$$

Le temps $\bar{t}$ correspondant à l'intersection de la tangente et de l'asymptote, i.e. $T(\bar{t}) = A$ vaut,

$$\bar{t} = \tau . \quad (13)$$



Exercice 2, Portée maximale de tir

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel le sol, comme repère un système de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical Oxy centré sur la position de tir, comme système le projectile.

- a) *Conditions initiales* :

$$\text{Position : } (x_0, y_0) = (0, 0) , \quad (14)$$

$$\text{Vitesse : } (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha) . \quad (15)$$

Loi du mouvement :

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} . \quad (16)$$

L'équation du mouvement (16) projetée selon les axes x et y donne respectivement

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = 0 , \quad (17)$$

$$\ddot{y} \equiv \frac{d^2y}{dt^2} = -g . \quad (18)$$

En intégrant les équations du mouvement (17) et (18) par rapport au temps, on obtient les composantes de la vitesse selon les axes x et y respectivement, i.e.

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = v_{0x} , \quad (19)$$

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} . \quad (20)$$

En intégrant les composantes de la vitesse (19) et (20) par rapport au temps, on obtient les équations horaires selon les axes x et y respectivement, i.e.

$$x(t) = v_{0x}t + x_0, \quad (21)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0. \quad (22)$$

Les conditions initiales (14) et (15) impliquent que les équations horaires (21) et (22) selon les axes x et y valent respectivement,

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (23)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t. \quad (24)$$

- b) Le projectile touche le sol en $y = 0$. L'équation (24) implique que cet impact a lieu au temps

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \quad (25)$$

En substituant ce temps dans l'équation horaire (23) selon l'axe x , on obtient la portée du tir, i.e.

$$x(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (26)$$

En utilisant la formule de trigonométrie,

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

la portée du tir (26) devient

$$x(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha). \quad (27)$$

Pour trouver l'angle α^* qui maximise la portée du tir, on annule la dérivée de l'équation (27) par rapport à l'angle α , i.e.

$$\left. \frac{dx}{d\alpha} \right|_{\alpha^*} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos(2\alpha^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Exercice 3, Tir balistique avec frottement

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel le sol, comme repère un système de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical Oxy centré sur la position de tir et comprenant le vecteur $\mathbf{v}_0$, comme système le projectile.

- a) *Conditions initiales* :

$$\text{Position : } (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (29)$$

$$\text{Vitesse : } (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha). \quad (30)$$

Seconde loi de Newton :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}. \quad (31)$$

L'équation du mouvement (31) projetée selon les axes x et y donne respectivement

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}, \quad (32)$$

$$m\ddot{y} = -mg - b\dot{y}. \quad (33)$$

Pour résoudre l'équation (32), on effectue le changement de variable suivant :

$$\dot{x} = v_x , \quad (34)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{1}{\tau}v_x. \quad (35)$$

Où l'on a introduit la notation $\tau = \frac{m}{b}$. En intégrant l'équation (35), il vient :

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (36)$$

Pour déterminer A , on utilise la condition initiale $\dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha$. Ce qui implique que :

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (37)$$

En intégrant l'équation (37), on obtient :

$$x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B. \quad (38)$$

On utilise à nouveau les conditions initiales pour déterminer la constante d'intégration B : $x(t=0) = -\tau v_0 \cos \alpha + B = 0$. On obtient ainsi l'équation horaire selon x :

$$x(t) = \tau v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (39)$$

Pour résoudre l'équation (33), on effectue le changement de variable suivant :

$$u = -g - \frac{1}{\tau}\dot{y} , \quad (40)$$

$$\ddot{y} = -\tau\dot{u}. \quad (41)$$

L'équation (33) devient ainsi :

$$-\tau\dot{u} = u. \quad (42)$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$u = C e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad (43)$$

$$\dot{y} = -\tau g - \tau C e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad (44)$$

$$y = -\tau g t + D + \tau^2 g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (45)$$

où C et D sont des constantes d'intégration, qu'on détermine à l'aide des conditions initiales $y(t=0) = 0$ et $\dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha$.

Il vient donc :

$$C = -g - \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau} , \quad (46)$$

$$D = \tau^2 g + v_0 \sin \alpha \tau. \quad (47)$$

Et donc on obtient finalement les deux équations du mouvements suivantes :

$$x(t) = \tau v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) , \quad (48)$$

$$y(t) = -\tau g t + \left(\tau^2 g + v_0 \sin \alpha \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) . \quad (49)$$