ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Mécanique - Corrigé de la série 20
2014-2015

Exercice 1, Centre de masse et moment d'inertie d'une portion de sphère pleine

a) En plaçant l'origine d'un repère cartésien au centre de la sphère, l'axe z confondu avec l'axe de révolution de l'objet, il vient par symétrie : $x_{cm} = y_{cm} = 0$
La coordonnée z_{cm} du centre de masse se calcule comme suit, en effectuant l'intégrale en coordonnées sphériques ($\rho = cste$) :

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int_M z dm = \frac{1}{M}\int_V z\rho dV = \frac{1}{V}\int_V z dV = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^R z\, r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \quad (1)$$

Nous avons que $z = r\cos\theta$. Donc :

$$z_{cm} = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\cos\theta\, r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta = \frac{1}{V}\frac{R^4}{4}2\pi\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{V}\frac{3\pi R^4}{16} \quad (2)$$

Reste à calculer le volume :

$$V = \int_V dV = \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin\theta dr d\phi d\theta = \frac{R^3}{3}2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{2\pi R^3}{6} \quad (3)$$

Et donc : $z_{cm} = \frac{1}{V}\frac{3\pi R^4}{16} = \frac{9R}{16}$.

b) Calcul du moment d'inertie autour de l'axe Δ :

$$I_\Delta = \int_M r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \rho dV = \rho\int_V r_\perp^2 dV = \rho\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^R r_\perp^2 r^2\sin\theta dr d\phi d\theta \quad (4)$$

Nous avons que $r_\perp = r\sin\theta$. Donc :

$$I_\Delta = \rho\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin^2\theta r^2\sin\theta dr d\phi d\theta = \rho\frac{R^5}{5}2\pi\int_0^{\pi/3}\sin^3\theta d\theta \quad (5)$$

Calculons cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3}\sin^3\theta d\theta &= \int_0^{\pi/3}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi/3}\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta d\theta \\ &= \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{5}{24}\end{aligned} \quad (6)$$

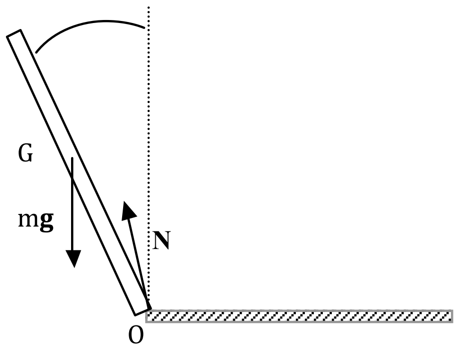
Et ainsi on obtient :

$$I_\Delta = \rho\frac{R^5}{5}2\pi\frac{5}{24} = \frac{\rho R^5\pi}{12} \quad (7)$$

Exercice 2, Chute d'une barre en milieu visqueux

a) La vitesse du centre de masse s'écrit : $v_G = \dot{\theta}\dfrac{L}{2}$

En appliquant la conservation de l'énergie, on a :



$$E_{initiale} = E_{finale} \;\Rightarrow\; mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (8)$$

$$mgL = \dot{\theta}^2\left[m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_G\right] \quad (9)$$

Rappel : pour une barre, $I_G = m\frac{L^2}{12}$, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgL}{m\frac{L^2}{4} + I_G} \;\Rightarrow\; v_G = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{mgL}{m\frac{L^2}{4} + I_G}} \quad (10)$$

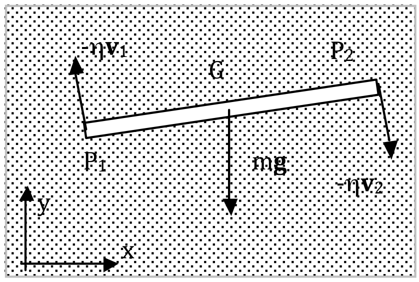
b) On a :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_i\right) \quad (11)$$

avec $i = 1,2$ indice des extrêmités respectives de la barre.

La somme des forces $\Sigma\boldsymbol{F}^{ext}$ s'écrit donc :

$$m\mathbf{g} - \eta\left[\mathbf{v}_G + \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1\right)\right] - \eta\left[\mathbf{v}_G + \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_2\right)\right] \quad (12)$$



Ce qui donne $\Sigma\boldsymbol{F}^{ext} = m\mathbf{g} - 2\eta\mathbf{v}_G$
car $\mathbf{GP}_1 = -\mathbf{GP}_2$.

Remarque : $\mathbf{v}_G$ et $\dot{\theta}$ varient avec le temps et sont déterminés par les équations du mouvement données en *c*) et *d*).

c) Par le point précédent, $m\dot{\mathbf{v}}_G = m\mathbf{g} - 2\eta\mathbf{v}_G$. Si la vitesse d'arrivée, initiale, de la barre dans le liquide n'a pas de composante sur z, alors on a :

$$\text{Sur x :} \quad \dot{v}_{Gx} = -2\frac{\eta}{m}v_{Gx} \qquad \text{Sur y :} \quad \dot{v}_{Gy} = -g - 2\frac{\eta}{m}v_{Gy} \quad (13)$$

On pourrait également écrire ces résultats avec x_G et y_G.

d) On applique le théorème du moment cinétique appliqué en G :

$$\begin{aligned} I_G\ddot{\theta} &= \mathbf{GP}_1 \wedge \left\{-\eta\left[\mathbf{v}_G + \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1\right)\right]\right\} + \mathbf{GP}_2 \wedge \left\{-\eta\left[\mathbf{v}_G + \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_2\right)\right]\right\} \\ &= -2\eta\mathbf{GP}_1 \wedge \left(\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1\right) \end{aligned} \quad (14)$$

La projection sur z donne l'équation du mouvement pour la vitesse de rotation instantanée :

$$I_G\ddot{\theta} = -2\eta\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta} \quad (15)$$

Exercice 3, Projectile contre solide

a) La quantité de mouvement dans le plan de glissement est conservée parce qu'on suppose qu'aucune force n'agit sur le système global. Il y a toutefois des forces intérieures qui, on le présume, travaillent induisant la non conservation de l'énergie. Le raisonnement sur la quantité de mouvement donne la vitesse après le choc :

$$P_{tot} = m\boldsymbol{v}_i = (M+m)\boldsymbol{V}_f \implies \boldsymbol{V}_f = \frac{m}{M+m}\boldsymbol{v}_i \approx \frac{m}{M}\boldsymbol{v}_i \tag{16}$$

Le centre de masse suit ainsi une trajectoire rectiligne dans la même direction que le projectile au moment de l'impact.

b) S'il y a tout de même une force qui s'exerce, elle est normale au plan. Le moment de cette force en n'importe quel point du plan est donc dans le plan, alors la projection du moment cinétique sur la normale au plan est conservée.

c) Soit O un point choisi du plan. Le moment cinétique en ce point est donné par :

$$\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\boldsymbol{OA}\wedge m\boldsymbol{v}_i}_{\text{projectile, avant collision}} = \underbrace{m\boldsymbol{OA}\wedge(\boldsymbol{V}_G+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{GA})}_{\text{projectile, après collision}} + \underbrace{\boldsymbol{OG}\wedge M\boldsymbol{V}_G + I_G\boldsymbol{\omega}}_{\text{cube, après collision}}\ , \tag{17}$$

où l'on a exprimé le moment cinétique après le choc comme la somme du moment cinétique de la masse m et du cube.

Lorsqu'on développe ce terme en notant que $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GA}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O =& m\boldsymbol{OG}\wedge\boldsymbol{V}_G + m\boldsymbol{GA}\wedge\boldsymbol{V}_G + m\boldsymbol{OG}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{GA}) + m\boldsymbol{GA}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{GA}) \\ &+ \boldsymbol{OG}\wedge M\boldsymbol{V}_G + I_G\boldsymbol{\omega} \qquad (18)\\ =& \boldsymbol{OG}\wedge(M+\cancel{m})\boldsymbol{V}_G + \left(I_G + \underbrace{\left|m\boldsymbol{GA}\wedge\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\wedge\boldsymbol{GA}\right)\right|}_{=m|\boldsymbol{GA}|^2}\right)\boldsymbol{\omega} \\ &+ \underbrace{m\boldsymbol{GA}\wedge\boldsymbol{V}_G}_{(1)} + \underbrace{m\boldsymbol{OG}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{GA})}_{(2)} \qquad (19)\end{aligned}$$

En se souvenant que $m << M$, et donc que le centre de gravité G demeure inchangé, cela donne :

$$\boldsymbol{OA}\wedge m\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{OG}\wedge M\boldsymbol{V}_G + I'_G\boldsymbol{\omega} \tag{20}$$

Avec :

$$I'_G = I_G + m\left|\boldsymbol{GA}\right|^2 = I_G + m\frac{L^2}{2} \tag{21}$$

On remarque que l'approximation $m << M$ revient à négliger les termes (1) et (2) dans l'équation 19. En fait, ces deux termes s'annuleraient si l'on plaçait une masse m identique au coin C du cube, de manière à conserver le même centre de gravité G. En projection on obtient :

$$-msv_i = -\left(s+\frac{L}{2}\right)M\underbrace{\frac{mv_i}{M}}_{\boldsymbol{V}_G=\boldsymbol{V}_f} + I'_G\omega \tag{22}$$

Avec s le paramètre d'impact donné par :

$$s = \left| \boldsymbol{OA} \wedge \frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \right| \tag{23}$$

On obtient finalement la vitesse angulaire de rotation du cube ω après le choc :

$$\omega = \frac{Lmv_i}{2I'_G} \tag{24}$$

d) La vitesse en A est donnée par

$$\boldsymbol{v}(A) = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GA} \tag{25}$$

Attention, cette fois $\boldsymbol{V}_G \neq \boldsymbol{V}_f$, sauf juste après le choc. Il faudra donc écrire $\boldsymbol{V}_G = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y$. En remarquant que $|\boldsymbol{GA}| = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, on arrive à

$$\boldsymbol{v}(A) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{L\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \frac{L\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ \dot{y} + \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Ce qui donne les équations du mouvement suivantes :

$$M\ddot{x} = -b(\dot{x} - \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\sin\theta) \tag{27}$$

$$M\ddot{y} = -b(\dot{y} + \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\cos\theta) \tag{28}$$

Avec $\dot{\theta} = \omega$.

e) Le théorème du moment cinétique appliqué au point G s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} &= I'_G\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = \boldsymbol{GA} \wedge (-b\boldsymbol{v}(A)) = \boldsymbol{GA} \wedge (-b(\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GA})) \\ &= -b\frac{L\sqrt{2}}{2}\left(\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta + \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{29}$$

Avec toujours $\dot{\theta} = \omega$. En projection selon $\mathbf{e}_z$ l'on obtient ainsi :

$$I'_G\ddot{\theta} = -b\frac{L\sqrt{2}}{2}\left(\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta + \omega\frac{L\sqrt{2}}{2}\right) \tag{30}$$